

Szakmai beszámoló a PD84093 számú OTKA zárójelentéshez

2014. április 30.

A jelen PD84093 számú OTKA projekt a K81188 számú projekt kiegészítése és a megelőző K73601 projekt egyenes folytatása. A projekt témája a téridőelméletek logikai alapozása és analízise. A projekt a 3 éves futamideje alatt végig a kutatási tervvel és a munkatervvel összhangban zajlott.

Alább ismertetjük a projekt során elért fő eredményeinket, résztemakörök szerinti bontásban:

1. Az idő struktúrájának algebrai vizsgálata

A téridőelméletek modellezése során a koordinátaidő struktúráját igyekszünk minél általánosabbnak tartani. Ahelyett, hogy azt tennénk fel, hogy az idő struktúrája izomorf a valós számokéval, általában csak annyit teszünk fel, hogy az idő struktúrája egy euklideszi test (azaz olyan rendezett test, ahol minden pozitív számnak van négyzetgyöke).

Ebben a témában megmutattuk, hogy ha a speciális relativitáselmélet *SpecRel* (vö. pl. [13]) axiómarendszerében az idő struktúrájáról csak annyit teszünk fel, hogy egy rendezett testet alkot (azaz ha nem tesszük fel, hogy minden pozitív számnak van négyzetgyöke), akkor is következnek az elméletből a relativitáselmélet szokásos predikciói, például, hogy a mozgó órák lelassulnak. Sőt, ez esetben is igaz, hogy a megfigyelők világképei közötti áttérési transzformációk Poincaré transzformációk [11]. Következésképpen, a speciális relativitáselmélet inerciális megfigyelőkre vonatkozó változata akár már a racionális számok teste felett is jól modellezhető.

Továbbá a racionális számtest felett megadtunk a speciális relativitáselméletnek egy olyan modelljét, amelyben tetszőleges irányban, tetszőleges

($v < c$) sebességhez, tetszőlegesen közeli sebességgel mozoghatnak inerciális megfigyelők [6]. Madarász X. Judit egy korábbi tétele alapján, nincs a speciális relativitáselméletnek olyan racionális számtest feletti 3 dimenziós modellje, amelyben teljesül az az erősebb feltevés, hogy tetszőleges irányban, tetszőleges ($v < c$) sebességgel mozoghat inerciális megfigyelő.

Az általános relativitáselmélet felé vezető úton van egy erős (az általánosítási törekvéseinkkel szemben ható) sodródás a valós számok struktúrája felé. Például a gyorsuló megfigyelők modellezésére szolgáló *AccRel* axiómarendszerünk (vö. pl. [15]) kikényszeríti, hogy az idő struktúrája elemien ekvivalens legyen a valós számokéval, azaz a valós számok nyelvén logikailag megkülönböztethetetlen a valós számoktól [14]. Következésképpen, a speciális relativitáselmélettel ellentétben *AccRel*-nek nincs modellje minden euklideszi test felett.

A [12] cikkben sikerült azt is bebizonyítani, hogy ha axiómaként feltesszük azt, hogy vannak egyenletesen gyorsuló megfigyelők, akkor már az algebrai valós számok teste sem lehet az idő struktúrája. Sőt, azon testek osztálya, amelyek fölött az egyenletesen gyorsuló megfigyelőkkel kiterjesztett *AccRel* elméletnek van modellje, nem is elemi osztály (azaz nem axiomatizálható elsőrendű logikában a valós számok nyelvén).

2. Fénynél gyorsabb részecskék létezésének logikai analízise

2011 végén tudományos szenzációnak számított, hogy az OPERA kísérletben a CERN és Gran Sasso laboratóriumok fénynél gyorsabban mozgó neutrínókat észleltek. Ennek a kísérletnek kapcsán több, komoly tudományos fórumon (például Scientific American, Nature) is elhangzott, hogy ha az OPERA kísérlet eredménye helyes, akkor Einstein relativitáselmélete megdőlné és alapjaitól kell újragondolni/újraépíteni az egészet.

Annak ellenére, hogy az OPERA kísérlet később hibásnak bizonyult és mégsem találtak fénynél gyorsabb neutrínókat, a kísérlet óta/hatására fontossá vált annak a kérdésnek az alapos megértése, hogy pontosan mennyire ingatná meg a relativitáselméletet ha kiderülne, hogy mégis csak vannak fénynél gyorsabb részecskék.

Modell elméleti eszközökkel megmutattuk, hogy a relativitáselmélet nem dőlt volna meg még akkor sem, ha valóban találtak volna fénynél gyorsabb

neutrínókat az OPERA kísérletben. Ugyanis a fénynél gyorsabb részecskék létezése logikailag független a relativisztikus kinematika axiómáitól [3].

Továbbá kidolgoztuk a relativisztikus dinamika (ütközések, tömeg) olyan verzióját, amely fénynél gyorsabban mozgó próbatestekre is vonatkozik. Majd megmutattuk, hogy a relativisztikus dinamika axiómáitól is logikailag független a negatív (tehetetlen) tömegű részecskék létezése [8].

Ezek az eredmények teljesen analógok a párhuzamossági axiómának az abszolút geometriától való függetlenségével. Következésképpen, a fénynél gyorsabb részecskék létezése konzisztens a relativisztikus kinematikával és a relativisztikus részecskedinamikával (azaz logikailag nem mond ellent ezeknek az elméleteknek).

A [2] cikkben pár természetes dinamika axiómából levezettük, hogy a fénynél gyorsabb részecskék relativisztikus tömege csökken a sebesség növekedésével (ellentétben a fénynél lassabb részecskék esetével, ahol a relativisztikus tömeg nő a sebesség növekedésével). A [2] cikkünkben azt is megmutattuk, hogy pár természetes dinamikai axióma feltevése esetén csak a [8] cikkbeli konstrukcióval lehet fénynél gyorsabb részecskékkel bővíteni a speciális relativitáselmélet standard modelljét.

Azt is megmutattuk, hogy a közhiedelemmel ellentétben, a fénynél gyorsabb részecskék létezése nem feltétlen vezet kauzalitás sértéshez. Azaz konstruáltunk egy olyan kiterjesztését a speciális relativitáselmélet standard modelljének, amelyben teljesül Einstein relativitási elve, továbbá minden térszerű egyenesen mozoghat fénynél gyorsabb részecske, de mégsem lehet üzenetet küldeni a múltba [1].

Az OPERA kísérlet hatására sokan mások is próbálták kiterjeszteni a speciális relativitáselmélet standard modelljét fénynél gyorsabban mozgó objektumokkal. Azt, hogy az axiomatikus megközelítés oldaláról gyakran tisztábban/élesebben látszanak az elméletek határai jól mutatja az, hogy megmutattuk, hogy James M. Hill és Barry J. Cox ‘Einstein’s special relativity beyond the speed of light’ cikkében megadott transzformációk csak akkor konzisztensek Einstein relativitás elvével, ha a téridő kétdimenziós, azaz csak egy tér és egy idő dimenzió van [4].

3. Relativisztikus kiszámíthatóságelmélet

A relativisztikus kiszámíthatóságelmélet (relativistic computation theory) egy napjainkban egyre népszerűbb, egyre intenzívebben kutatott terület. A

relativisztikus számítógépek alapgondolata analóg a kvantumszámítógépek gondolatával, az egyetlen különbség, hogy itt nem kvantummechanikai effektusokat, hanem relativisztikus effektusokat használunk arra, hogy hatékonyabb számítógépeket kapjunk.

Ebben a témakörben megmutattuk, hogy ha vannak fénynél gyorsabb részecskék, akkor már a speciális relativitáselmélet keretei között is lehet a téridő sajátosságait kihasználva olyan kísérletet tervezni, ami eldönt egy nem Turing kiszámítható problémát (például a ZFC axiómarendszer konzisztenciáját). Azt is megmutattuk, hogy ilyen kísérlet csak akkor létezik a speciális relativitáselmélet keretei között, ha vannak fénynél gyorsabb részecskék [10].

4. Az aktuális és potenciális fizikai létezők megkülönböztetése

A relativitáselméletben rengeteg helyen előjönnek potenciálisan létező objektumok. Például azt, hogy „tetszőleges időszerű görbén *mozoghat* egy megfigyelő” úgy szokás érteni, hogy „tetszőleges időszerű görbén *van* egy *potenciális* megfigyelő”. Klasszikusan nem lehet különbséget tenni ezek között a potenciálisan létező és az aktuálisan létező objektumok között.

Az elméletek többségében nem okoz gondot, hogy nem tudunk különbséget tenni aktuális és potenciális létezők között. Például, geometriában egyáltalán nem baj, hogy nem tudjuk az elméletben megkülönböztetni a papírlapra már megrajzolt aktuálisan létező egyeneseket a potenciálisan megrajzolható egyenesektől.

A relativitáselméletben viszont néha fontos lenne ez a különbségtétel. Fontos lenne, hogy meg tudjuk különböztetni az aktuálisan létező objektumokat (részecskéket, megfigyelőket, fényjeleket, stb.) a potenciálisan létezőktől.

Ennek kapcsán megadtunk a relativitáselméletnek egy olyan modális logikai axiómarendszerét, amelyben különbséget lehet tenni aktuálisan létező és lehetséges objektumok között (a korábbi axiómarendszerek mindig csak lehetséges létezőkre vonatkoztak).

Bebizonyítottuk, hogy a modális axiómarendszerünkben is következik, hogy a megfigyelők közötti világkép transzformációk, Poincaré transzformációk [7]. Következésképpen a modális axiómarendszerünkben is következnek a relativisztikus kinematika szokásos predikciói.

A modális axiómarendszer egy további előnye, hogy pusztán kinematikai fogalmakkal és egyetlen etalon test segítségével explicit definíciót lehet adni a relativisztikus tömegre. A klasszikus kinematikai axiómarendszerekben nem adható meg ilyen explicit definíció.

Továbbá a modális elméletből (pár természetes segédaxióma hozzávételével) bebizonyítottuk a relativisztikus tömegnövekedési tételt [7].

Ennek a kutatási irányynak a folytatásaként Molnár Attila doktoranduszommal jelenleg egy olyan modális logikai kereten dolgozunk, amelyben az is megragadható, hogy a megfigyelők hogyan tudják feltérképezni a teljes téridőt a lokális tudásuknak egymással való kommunikálása által.

A kapcsolódó friss eredményeinket az idén júliusban, Bécsben megrendezésre kerülő Logic Colloquium 2014 konferencián fogjuk ismertetni.

5. Teljességi tételek

Megadtuk az általános relativitáselmélet standard modelljeinek, azaz a Lorentz sokaságoknak, a rendezett testek feletti általánosítását. Egy korábbi eredményünk általánosításaként/továbbfejlesztéseként megmutattuk, hogy a GenRel nevű axiómarendszerünk teljes ezekre a rendezett testek feletti Lorentz sokaságokra [5].

A fenti eredmény azt jelenti, hogy minden ami igaz a standard modellekben, az levezethető a GenRel axiómáiból. Ennek a tételnek a bizonyítása azon múlik, hogy minden GenRel modellből tudunk konstruálni egy Lorentz sokaságot.

Természetesen vetődik fel a kérdés, hogy lehet-e minden Lorentz sokaságból konstruálni egy modelljét a GenRel axiómarendszerünknek?

Ennek a kérdésnek a megválaszolása jelenleg abban a stádiumban van, hogy minden valós számok feletti Lorentz sokaságból tudunk GenRel modellt konstruálni a Fermi–Walker transzport segítségével [5]. Az, hogy ez a konstrukció működik-e tetszőleges rendezett test felett, illetve, ha nem akkor mely rendezett testek felett működik, egyelőre nyitott kérdés.

Ennek a kutatásnak egy további természetes folytatása, hogy logikai interpretációkat adunk meg a GenRel axiómarendszerünk és az irodalomban lévő axiómarendszer között. Az irodalomban több izolált axiómarendszer van a relativitáselméleteknek. Ezek többnyire különböző alapfogalmakat/alapfeltevéseket használnak. Például James Ax a jelek küldését és fogadását, Goldblatt a Minkowski merőlegességet, Penrose–Kronheimer az

események kauzális rendezését, mi megfigyelőket és egy világgép-relációt veszünk fel alapfogalomnak.

Azért is fontos ezeket az izolált axiómarendszereket fordítófüggvényekkel és logikai interpretációkkal összekötni, mert ezáltal megérthetjük a különböző alapfogalmaknak és alapfeltevéseknek az elméletben játszott szerepét.

Többen is terveznek ilyen irányú közös kutatásokat folytatni velünk a közeljövőben. Például PhD diákom Koen Lefever (Brussel) 2014 júliusában Budapestre jön, hogy intenzíven dolgozzunk ezen a témán. Valamint a 2015/2016-os akadémiai évben Thomas Benda (Taiwan) Budapestre jön, hogy az alkotószabadsága ideje alatt kidolgozzuk a megfelelő hidat a mi Gen-Rel nevű általános relativitáselmélet axiómarendszerünk és az ő axiómarendszere között.

Hivatkozások

- [1] Andréka H; Madarász X J; Németi I; Stannett M; Székely G: *Faster than light motion does not imply time travel*, **Classical and Quantum Gravity** 31: (9) Paper 095005. (2014). IF: 3.562**
- [2] Madarász X J; Stannett M; Székely G: *Why Do the Relativistic Masses and Momenta of Faster-than-Light Particles Decrease as their Speeds Increase?* **Symmetry Integrability and Geometry-Methods and Applications** 10: (5) pp. 1-21. (2014). IF: 1.243**
- [3] Székely G: *The existence of superluminal particles is consistent with the kinematics of Einstein's special theory of relativity*, **Reports on Mathematical Physics** 72:(2) pp. 133-152. (2013). IF: 0.756*
- [4] Andréka H; Madarász X J; Németi I; Székely G: *A note on "Einstein's special relativity beyond the speed of light by James M. Hill and Barry J. Cox"*, **Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science** 469:(2154), (2013). IF: 2.378*
- [5] Andréka H; Madarász X J; Németi I; Székely G: *An Axiom System for General Relativity Complete with respect to Lorentzian Manifolds*, arXiv:1310.1475, (2013).

- [6] Madarász X J; Székely G: *Special Relativity over the Field of Rational Numbers*, **International Journal of Theoretical Physics** 52:(5) pp. 1706-1718., (2013). IF: 1.086*
- [7] Molnár A; Székely G: *Axiomatizing Relativistic Dynamics using Formal Thought Experiments*, pre-print, <http://philsci-archive.pitt.edu/9914/>, (2013).
- [8] Madarász X J; Székely G: *The Existence of Superluminal Particles is Consistent with Relativistic Dynamics*, arXiv:1303.0399, (2013).
- [9] Andréka H; Németi I; Székely G: *Closed Timelike Curves in Relativistic Computation*, **Parallel Processing Letters** 22:(03), 15pp., (2012).
- [10] Németi P; Székely G: *Existence of Faster Than Light Signals Implies Hypercomputation Already in Special Relativity*, **Lecture Notes in Computer Science** 7318, pp. 528-538., (2012).
- [11] Andréka H; Madarász X J; Németi I; Székely G: *What are the numbers in which spacetime?*, arXiv:1204.1350, (2012).
- [12] Székely G: *What properties of numbers are needed to model accelerated observers in relativity?*, arXiv:1210.0101, (2012).
- [13] Andréka H; Madarász X J; Németi I; Székely G: *A logic road from special relativity to general relativity*, **Synthese** 186(3):pp.633-469 (2012). IF: 0.696
- [14] Székely G: *First-Order Logic Investigation of Relativity Theory with an Emphasis on Accelerated Observers*, PhD thesis ELTE, Budapest, (2009).
- [15] Madarász X J; Németi I; Székely G: *Twin Paradox and the logical foundation of relativity theory*, **Foundations of Physics** 36(5):pp.681-714 (2006). IF: 0.854