

Összefoglaló a

Szakaszosan sima matematikai modellek a
gépészmérnöki gyakorlatban

(OTKA K 83890)

projekt keretében végzett kutatómunkáról

Dr. Csernák Gábor
vezető kutató

1. Bevezetés

Számos műszaki probléma matematikai modellezéséhez ún. szakaszosan sima modelleket használnak. Ezekre a modellekre jellemző, hogy két vagy több lehetséges mozgásegyenlet rendszer létezik, melyek közül a rendszer állapotától függően egyszerre csak egy érvényes. A mozgás során több alkalommal is történnek átkapcsolások a különböző mozgásegyenletek között. Az átkapcsolások miatt a szakaszosan sima modellek erősen nemlineárisak, következésképpen gyakran kaotikus viselkedést mutatnak. A kutatás tárgyát olyan szakaszosan sima modellekkel leírható problémák képezték, melyekhez hasonló matematikai eszközök szükségesek:

- Forgácsolási folyamatok kvalitatív vizsgálata.
- Káosz digitálisan szabályozott rendszerekben.
- Száraz súrlódású oszcillátor kaotikus és tranziens kaotikus rezgései.

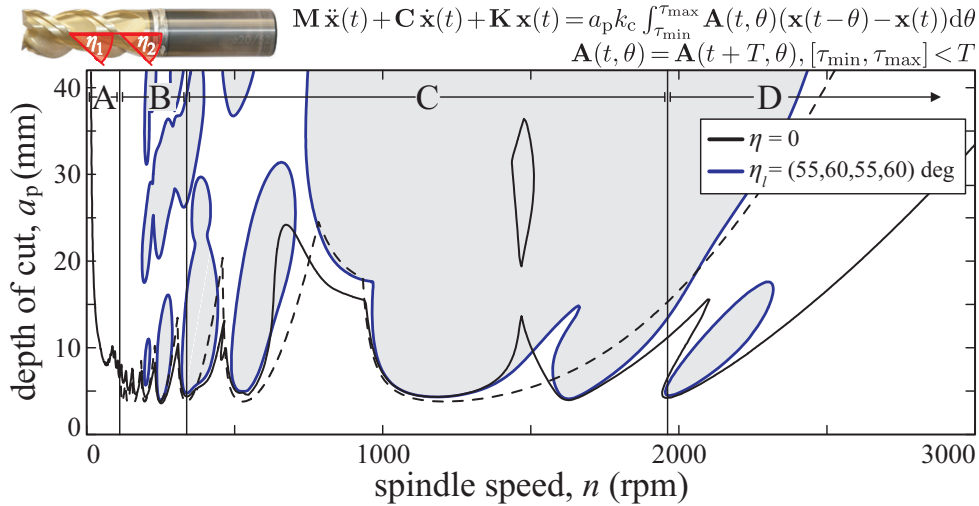
A kutatás módszerei a három részterület esetén azonosak voltak: kiterjedt numerikus vizsgálatok mellett a mozgásegyenletek ún. kvalitatív analízise – bifurkációk keresése –, valamint kísérletek segítségével próbáltuk több szempontból is ellenőrizni eredményeinket. Ahol lehetséges volt, ott analitikus módszereket is használtunk.

Az öt éves kutatómunkában négy kolléga vett részt, összesen 8.83 FTE értékkel. A forgácsolási folyamatok vizsgálatával foglalkozó Dombóvári Zoltán a projekt időtartama alatt megvédte PhD fokozatát, ezért fokozatosan csökkentette FTE értékét, az utolsó évben pedig kivált a kutatócsoportból és saját OTKA pályázat keretében folytatta a munkát. Licskó Gábor egy száraz súrlódású oszcillátor kaotikus rezgéseit vizsgálta. A beszámolási időszakban először fél- majd teljes állásban egy ipari cégnél dolgozott, ennek megfelelően szintén csökkentette FTE értékét. Az említett okok miatt csökkenő munkaidő ráfordítás kompenzálása érdekében a projekt harmadik évében csatlakozott a pályázathoz Gyebroszki Gergely doktorandusz, aki a digitális hatások következtében kialakuló kaotikus rezgések vizsgálatával kezdett foglalkozni. Csernák Gábor vezető kutató elsősorban a száraz súrlódású oszcillátor és a digitális szabályozás témakörében végzett kutatómunkát, emellett a forgácsolás vizsgálatával is foglalkozott.

2. Forgácsolási technológiák kvalitatív elemzése

Az időben periodikusan (paraméteresen) gerjesztett marási eljárások modellezése összetett probléma, melynek nehézsége függ az alkalmazott marási eljárástól, illetve a marószerszám geometriájától. Az OTKA projekt keretein belül az egyik legbonyolultabb geometriájú marószerszámot, a folytonosan változó hélix szögű szerszámot vizsgáltuk. Az alkalmazott modell lineáris, azonban a speciális élgeometria miatt az ilyen szerszámmal végzett marási folyamatok stabilitásvizsgálata nem triviális, mert a folyamat egy ún. elosztott késleltetett differenciálegyenlettel modellezhető. A késleltetés abból következik, hogy mindegyik szerszám él az előző él által hagyott felületet munkálja meg. Az elosztott késleltetés modellezése helyett véges sok diszkrét késleltetés alkalmazása mellett döntöttünk, melyet a forgácsoló szerszám axiális felosztásával értünk el. Az ún. szemi-diszkretizációs módszer segítségével előállítható egy olyan átviteli mátrix, melynek segítségével meghatározható a rendszer

lineáris stabilitása egy adott paraméterhalmaz esetén. Megmutattuk, hogy lineárisan változó hélix szögű marószerszám esetén az ún. instabil nyúlványok bezáródhatnak és szigeteket alkothatnak (1. ábra). Tehát elméletileg az eddigieknél egy nagyságrenddel nagyobb fogásmélységgel is lehetséges stabil forgácsolás. Ezzel kapcsolatos eredményeinket nemzetközi



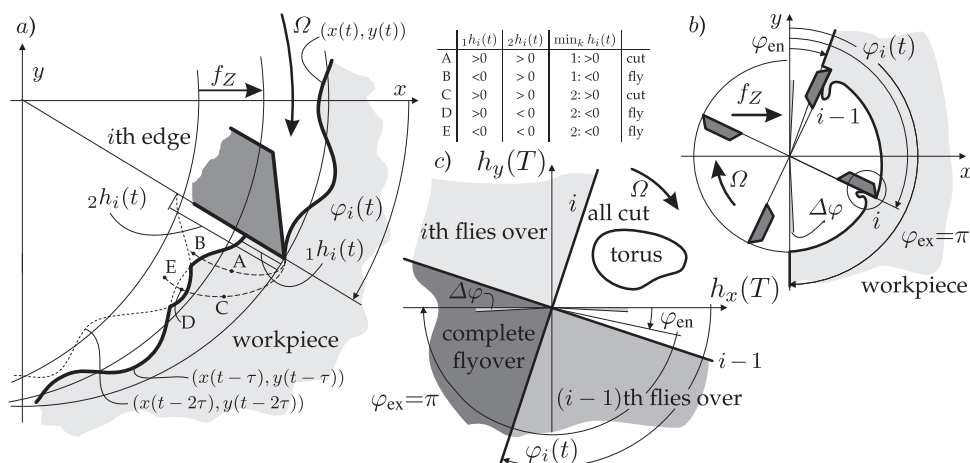
1. ábra. Stabilitási tartományok a fordulatszám és a fogásmélység függvényében egyenes élű és változó hélix szögű szerszámok esetére.

konferencián [1] és Q1 minősítésű folyóirat cikkben [2] publikáltuk.

Több szabadsági fokú esetben jelentősen lecsökken a stabil tartományok aránya, azonban még így is sokkal előnyösebb a változó élgeometriájú szerszámok használata. Alacsony fordulatszámok – például titán forgácsolása – esetén általános esetben is jobban teljesít a változó élgeometriájú szerszám, mint a szokványos megfelelője. A mérnöki gyakorlat szempontjából fontos egy hatékony optimalizációs eljárás kifejlesztése, melyhez a megoszló időkézés Laplace-transzformációhoz hasonlatos tulajdonságának a kihasználása vezethet [6].

A szerszámgéprezgésekkel kapcsolatban az ún. szerszámelhagyás hatásait is vizsgáltuk, amikor a szerszám egyes szakaszai a rezgések során elhagyják a munkadarabot (2. ábra). Extrém esetben ez a fogácsolási erő teljes kikapcsolásához vezethet. Egy ipari marási eljárás lineáris stabilitásának meghatározásakor egy szerszámelhagyásnak megfelelő stabil sziget jelenik meg, de az elkészített, szakaszosan sima marási folyamatok időbeli szimulációjára képes algoritmussal nem tudták megtalálni ezt a szigetet. Megmutattuk, hogy speciális kezdeti függvények és speciálisan megválasztott zavarások esetén bent lehet tartani a megmunkálást a stabil szigeten. Ez viszont azt jelenti, hogy hiába tartalmazza a modell az extrém nagy fogácsleválasztást ígérő stabil szigeteket, azok a szakaszosan sima hatások miatt elérhetetlenek lehetnek. Ezzel kapcsolatos eredményeinket Q1 minősítésű folyóirat cikkben publikáltuk [3]. A cikk egy speciális stabil sziget vizsgálatával foglalkozik, melynek olyannyira kicsi a vonzási tartománya, hogy az a gyakorlatban biztosan nem érhető el valós megmunkálás esetén. Ez a probléma kimutathatatlan a mérnöki gyakorlatban alkalmazott lineáris módszerek segítségével, kizárólag a rendszer nemlineáris és szakaszosan sima modelljének alapos vizsgálata deríthet fényt az ehhez hasonlatos modellbeli hiányosságokra.

Szerszámgéprezgésekkel foglalkozó szakemberek gyakran tapasztalják a fémmegmunkálási eljárások bistabil tulajdonságát. A regeneratív hatás által keltett dinamikus stabilitásvesztés során instabil kváziperiodikus pályák jönnek létre, melyek kedvezőtlen esetben a



2. ábra. (a) Az i -edik szerszámél a (b) ábrán mutatott marási folyamat során. (c) Az időfüggő kapcsolófelületek egy lehetséges reprezentációja és a kváziperiodikus megoldásoknak megfelelő instabil tórusz.

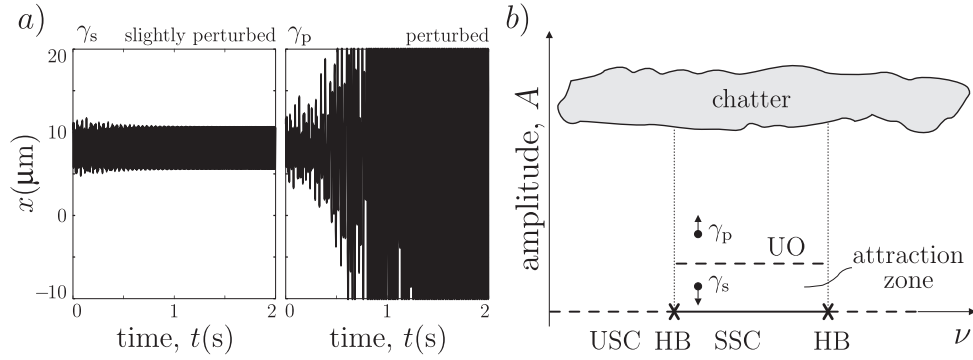
stabil forgácsoláshoz tartozó zóna felett, úgynevezett szubkritikus módon is keletkezhetnek. Ilyenkor nagy perturbációk az instabil pályán kívüli, másik stabil állapotba lökhetik a rendszert (3. ábra). A stabil forgácsolás vonzási tartománya behatárolható a szerszámélek kilépésének a vizsgálatával. Kilépés során a gerjesztő erő hirtelen, szakaszosan sima módon változik meg, ami megnehezíti az egyenletek elemzését. Marás esetén előállítható a fázistérnek egy olyan projekciója, amivel a kilépés feltétele geometriailag jól leírhatóvá válik. A marószerszám éppen forgácsolást végző élei felosztják a fázistert tartományokra, ahol minden él forgácsol, ahol kimaradnak élek és olyan tartományra, ahol a szerszám átrepül a munkadarab felett (2. ábra) [4]. A fázistér megfelelő levetítésével a tartományokat határoló, periodikusan mozgó kapcsoló felületek azonosíthatóak és alkalmassá tehetőek mechanikai modellbe való beépítésre.

A stabilitásvizsgálatok mellett a forgácsképződés folyamatának modellezésével is foglalkoztunk. Egy termomechanikai modell alapján megvizsgáltuk a szerszám és a munkadarab elválásának, továbbá az élrátét felépülésének és leszakadásának hatását a kialakuló forgácsok jellegére. Az így kapott szakaszosan lineáris modellekben változatos dinamikai viselkedést, például kaotikus rezgéseket mutattunk ki. Az eredményeket nemzetközi konferencián ismertettük [5].

A marás folyamatának vizsgálata mellett megvizsgáltuk a változó élgeometriájú mélyfúró szerszámok dinamikai tulajdonságait is. A model egy matematikailag nehezen kezelhető ún. megoszló állapotfüggő késleltetett differenciálegyenletre vezet, melynek stabilitási viszonyai igen változatosak lehetnek. Ez előnyösen kihasználható mélyfúrás környezetében, ahol a fúrás viszonyaitól függően, mind a stabil, mind az instabil vágás előnyös lehet [6].

3. Digitális szabályozás

A számítógéppel szabályozott rendszerek viselkedését jelentősen befolyásolják az ún. digitális hatások: a mintavételezés, a késés és a kerekítés. A műszaki gyakorlatban általában figyelembe veszik a mintavételezést és a késést. Ezzel szemben gyakran véletlenszerű zajként kezelik a kerekítési hiba hatását, noha megmutatható, hogy determinisztikus kaotikus



3. ábra. (a) Időtartománybeli szimulációk, különböző perturbációk mellett. (b) Vázlatos bifurkációs diagram (HB: Hopf-bifurkációnak megfelelő nem hiperbolikus pont)

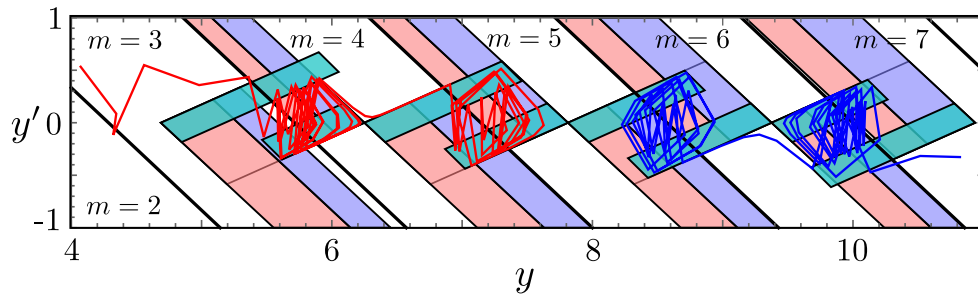
viselkedéshez vezethet.

A projekt első felében egy általános egy szabadsági fokú PD szabályozású oszcillátort vizsgáltunk. A negatív merevség miatt instabil a szabályozatlan rendszer egyensúlyi helyzete. τ mintavételezési periódusonként történik beavatkozás, azonban a szabályozó erő kvantált, csak egy ΔF érték egész számszorosa lehet:

$$\ddot{x}(t) + \frac{c}{M}\dot{x}(t) - \frac{k}{M}x(t) = -\frac{\Delta F}{M}\text{Int}\left(\frac{\tilde{P}x_j + \tilde{D}\dot{x}_j}{\Delta F}\right), \quad j = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

ahol $t \in [j\tau, (j+1)\tau)$. $x_j \equiv x(j\tau)$ és $\dot{x}_j \equiv \dot{x}(j\tau)$ az egyensúlyi helyzettől mért elmozdulást és a sebességet jelölik a mintavételi időpontokban, az $\text{Int}()$ függvény az origó felé kerekít.

Levezettük, hogy a szabályozott rendszer viselkedése egy ún. mikro-kaosz leképezéssel írható le, majd matematikailag bizonyítottuk, hogy véges paramétertartományokban kaotikus viselkedés alakul ki. Megmutattuk, hogy a rendszer fixpontjai között a pékleképezésnek megfelelő struktúrák alakulnak ki. A mozgásegyenlet szakaszosan lineáris volta lehetővé tette ún. Smale-patkók szerkesztését analitikus számítások segítségével, ami a kaotikus (illetve tranzienst kaotikus) viselkedés egyértelmű bizonyítéka (4. ábra). Ellenő-



4. ábra. Két attraktor (középen) és két ezekbe vezető repellor, numerikusan generált trajektóriákkal.

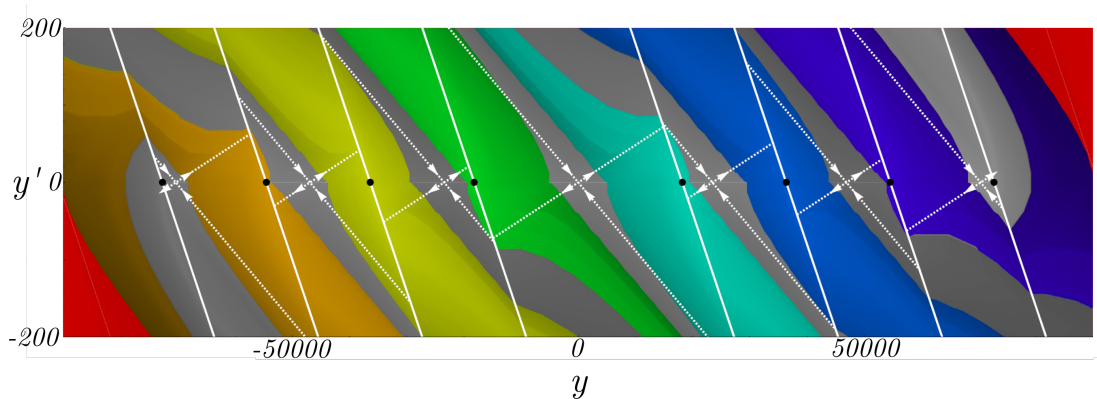
rítettük azt is, hogy nem a digitális rendszer szimulációjához használt számítógép – szintén digitális – működése okozza-e a numerikusan tapasztalt kaotikus viselkedést. Megmutattuk, hogy ez a hatás elhanyagolható a vizsgált paramétertartományban. Az eredményeket nemzetközi konferencián [7] és Q1 besorolású folyóirat cikkben publikáltuk [8].

Kimutattuk, hogy a mikro-káosz leképezés fázissterében könnyen konstruálható ún. generáló partíció. Ennek következtében a szimbolikus dinamika eredményeinek felhasználásával periodikus pályákat lehet keresni, melyek alapján a kaotikus rendszer jellemzői (entrópia, kiszökési ráta, dimenziók, stb.) könnyen számíthatók. A módszer előkészítéséhez kombinatorikai alapon kell számsorozatokot generálni, melyek az egymástól valóban különböző, ún. prím ciklusokat jellemzik. A számsorozatok generálása után már gyorsan megkereshetőek a periodikus pályák [7].

Az attraktorok megkereséséhez készítettünk egy célprogramot az ún. általánosított cella leképezés segítségével, ami a fázistér globális szerkezetének feltérképezésére használható. Az ezzel elért eredményeket nemzetközi konferencián publikáltuk [9].

Továbbfejlesztettük, implementáltuk és a mikro-káosz leképezésre alkalmaztuk a cella leképezés különböző változatait. Az ún. egyszerű cella leképezés (SCM, simple cell mapping) segítségével jól el lehet különíteni az attraktorok vonzási tartományait (5. ábra). Kísérletek alapján felvetődött, hogy száraz (Coulomb) súrlódás mellett is létrejöhet-e a mikro-káosz jelensége. Ennek kapcsán általánosítottuk a mikro-káosz leképezést a száraz súrlódás figyelembevételével. Az így nyert hibrid kapcsolású mikro-káosz leképezésben a szabályozásra vonatkozó kapcsolások csak a mintavételezési időpillanatokban történnek meg, míg a súrlódásra vonatkozó kapcsolások azonnaliak. Az egyszerű cella leképezéssel kapott eredmények nem zárják ki a kaotikus rezgések kísérleti kimutatását (5. ábra).

A cella leképezés meglehetősen számításigényes, de jól átgondolt algoritmusokkal néhány másodperces futási időket sikerült elérni a vizsgált probléma vizsgálata során. A sok párhuzamosítható művelet miatt a korszerű grafikus kártyák számítási kapacitásának kihasználására is alkalmas a megvalósított program. Az egyszerű cella leképezéssel és a súrlódással kiegészített mikro-káosz leképezéssel kapcsolatos eredményeinket konferencián publikáltuk, az egyik kiadvány könyv formájában is megjelent [10, 11].



5. ábra. Egyszerű cella-leképezéssel kapott ábra egy létező inverz inga paramétereinél. A fekete pontok kis méretű attraktorokat, a nyilak a fixpontok stabil és instabil sokaságait jelölik. Az attraktorokat metsző ferde vonalak a szabályozó erő különböző értékek tartományait határolják. A fixpontokat tartalmazó szürke tartományokban letapadás történhet a száraz súrlódás következtében, a színes tartományok a súrlódás mellett is létező kaotikus attraktorok vonzási tartományai.

A cella leképezés alkalmazásának legnagyobb korlátja a rendelkezésre álló memória szűkösége. Ennek kezelése érdekében kidolgoztunk egy algoritmust, mely több különálló cella leképezés eredményének összeillesztésére alkalmas és lehetővé teszi a vizsgált fázistér

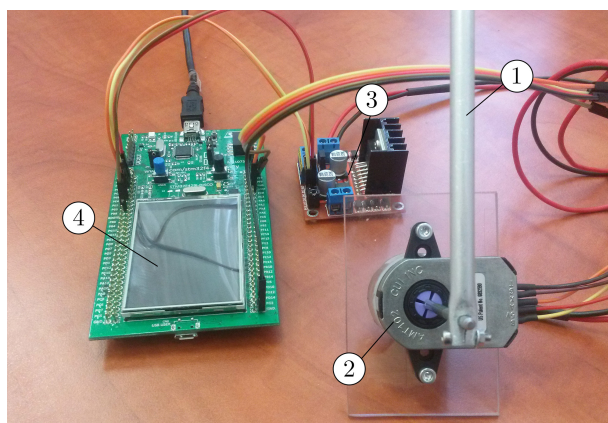
adaptív bővítését, illetve megkönnyíti a párhuzamos futtatást. Az algoritmust ismertető cikket egy Q1 besorolású folyóirathoz nyújtottuk be [12].

Konferencia előadásaink után kapott hozzászólások arra utaltak, hogy érdekesebb a kaotikus viselkedés egyre bonyolultabb rendszerekre vonatkozó bizonyítása helyett a rezgések gyakorlat számára használható jellemzőinek meghatározására koncentrálni. Ennek érdekében általánosítottuk a mikro-káosz leképezést tetszőleges dimenziójú és feldolgozási késésű, teljes állapotvisszacsatolású rendszerekre. Ehhez a szabályozástechnikában használt állapotter modell formalizmusát alkalmaztuk [13].

Az attraktorok vonzási tartományai bonyolult struktúrát alkotnak, ezért hosszú tranziensek előzhetik meg az állandósult kaotikus állapotot. Mivel mind a tranziens, mind az állandósult mozgás kaotikus, ezek elkülönítése nehéz feladat. Eredményeink arra utalnak, hogy a mikro-káosz leképezés esetében analitikusan kifejezhető Ljapunov-exponens numerikus számításának konvergenciája alapján lehetne következtetni a tranziensek lecsengésére. Emellett az egyszerre létező attraktorok automatizált elkülönítésére is lehetőséget látunk, ugyanis az attraktorok fraktáldimenziója és topológikus entrópiája eltér [13].

A gyakorlat számára fontos annak ismerete, hogy mekkora lehet a digitális hatásokkal kapcsolatba hozható legnagyobb szabályozási hiba. Analitikus felső becslést adtunk arra, hogy a szabályozott rendszer állandósult állapota mennyire térhet el a megkívánt állapottól. Levezettünk egy egyszerű képletet is, mely széles paramétertartományokban jó becslést ad a szabályozási hibára. Az eredmények érvényességi körének pontosabb behatárolása érdekében a mikro-káossal kapcsolatos globális bifurkációk vizsgálata is előtérbe került. Ennek során több különböző típusú bifurkációt (pl. border collision, crisis, stb.) sikerült azonosítani és analitikusan leírni, de a numerikus vizsgálatok más nemsima bifurkációk előfordulására is utalnak. Az eredmények alapján írt cikket Q1 besorolású folyóirathoz nyújtottuk be [14].

A projekt keretében elkezdődött a mikro-káosz kísérleti kimutatására alkalmas digitálisan szabályozott berendezés építése és tesztelése is (6. ábra). Az előzetes eredményeket nemlineáris idősor analízis segítségével dolgoztuk fel. Kísérleti tapasztalatainkat nemzetközi konferencián publikáltuk [15].



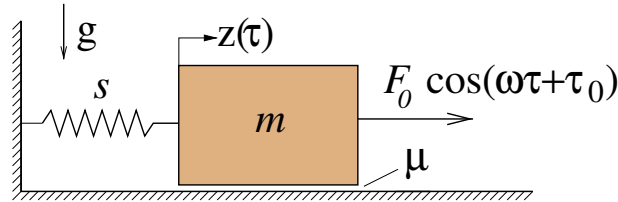
6. ábra. Mikro-káosz kimutatására épített kísérleti eszköz. (1): inverz inga, (2): DC motor és enkóder, (3): H-híd, (4): mikrokontroller.

A kidolgozott módszerek gyakorlati alkalmazásaként megvizsgáltuk egy digitálisan szabályozott fékmodell viselkedését az általánosított cella leképezés segítségével. Eredmé-

nyeink szerint kis amplitúdójú kaotikus rezgés rakódik rá a kialakuló periodikus mozgásra [16].

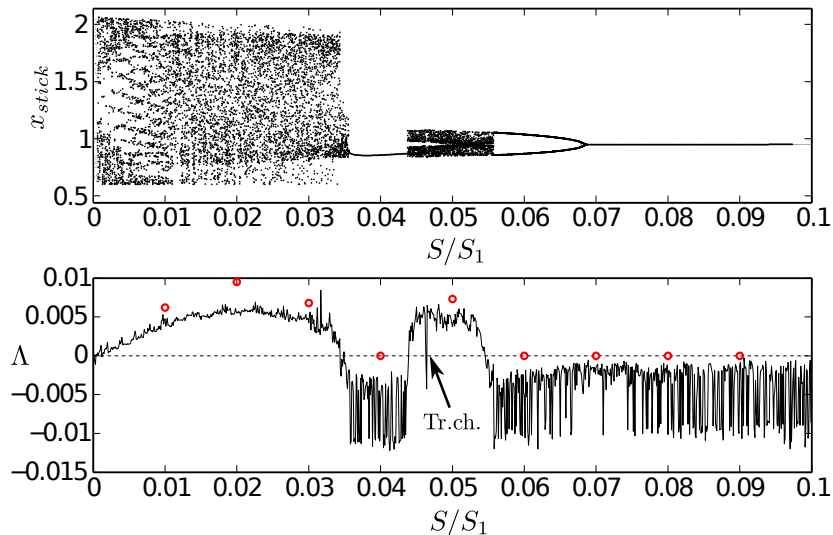
4. Száraz súrlódású oszcillátor

A kutatómunka során a 7. ábrán látható egyszabadságfokú száraz súrlódásos oszcillátor vizsgálatával foglalkoztunk. Az ún. nemlineáris idősor-analízis előzetes eredményeire ala-



7. ábra. A vizsgált mechanikai rendszer.

pozva két független numerikus módszerrel is bizonyítottuk kaotikus megoldások létezését ebben a rendszerben. Az első módszer közvetlenül a Ljapunov-exponens definícióján alapul, a másik pedig a káosz-szinkronizáció jelenségén. A kétféle módszerrel kapott eredmények (8. ábra) jó egyezést mutatnak. Az ezzel kapcsolatos eredményeket nemzetközi konferenciákon [17, 18], valamint Q2 besorolású folyóirat cikkben publikáltuk [19].



8. ábra. A letapadási helyek (felső ábra) és a kiszámolt Λ Ljapunov-exponens (alsó ábra) a csúszási és tapadási súrlódási együtthatók aránya függvényében. A folytonos vonal a direkt módszer, a körök pedig a szinkronizációs módszer eredményeit mutatják. Tranzien káosz a megjelölt paraméter közelében lép fel.

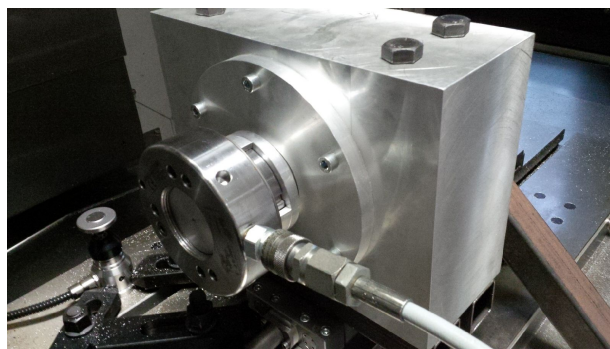
Kimutattuk, hogy egy szűk paraméter tartományban tranzien káosz lehetséges. Ebben az esetben a kezdetben kaotikus megoldások két háromperiódusú megoldás egyikéhez szöknek ki. Numerikus szimulációval előállítottuk a kaotikus repellor pókháló-diagramját

minden harmadik letapadás segítségével és megszerkeztettük ennek a leképezésnek az egyenes szakaszokkal való közelítését. A közelítő leképezés jól visszaadja az eredeti rendszer dinamikáját, de a megoldások számítása sokkal gyorsabb. A leképezéssel átlagos kiszökési időket számítottunk és meghatároztuk a véges idejű Ljapunov-exponenst a kérdéses paraméter tartományra. Eredményeinket nemzetközi konferencián publikáltuk [18].

Az eredmények kísérleti ellenőrzéséhez súrlódási tényező méréseket hajtottunk végre. Olyan anyagot ill. anyagpárt kerestünk, amelynél a csúszási és tapadási súrlódási tényező különbsége elegendően nagy (legalább 8:1 arány) ahhoz, hogy az elméletileg megjósolt kaotikus rezgés kialakulhasson. Szakirodalmi adatokból kiindulva köszörült és polírozott acél-acél, acél-kerámia, illetve acél-polimer párokat vizsgáltunk, melyekkel azonban nem sikerült a kívánt súrlódási tényező arányt elérni. Eredményeinket nemzetközi konferencián publikáltuk [20].

Mivel a súrlódási tényezővel kapcsolatos méréseink nem jártak sikerrel, más megoldás felé fordultunk. Katalógus adatok szerint bizonyos nagyteljesítményű, előfeszített kúpgörögös csapágyak indításkor 8-10-szer akkora nyomatékot igényelnek, mint a tengely forgása közben. Ez alapján megterveztünk és elkészítettünk egy tesztberendezést (9. ábra), melyben két ilyen csapágy kapott helyet.

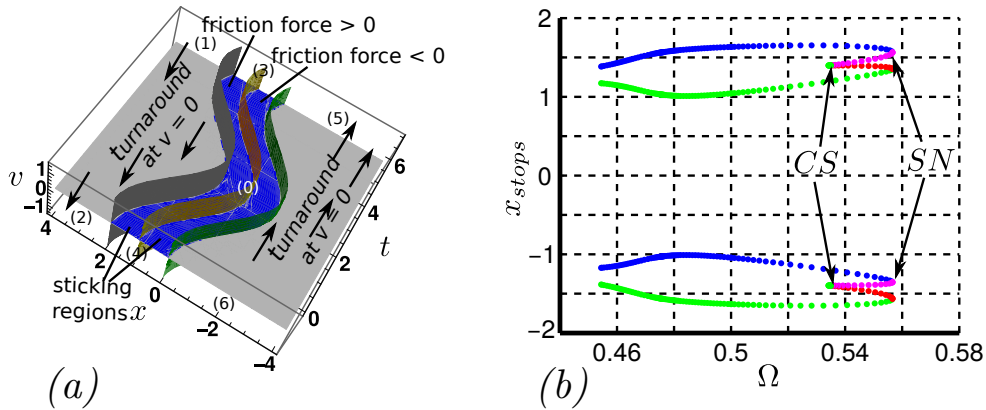
Az elkészült berendezésen egy hidraulikus anya segítségével különböző előfeszítő erőket tudunk beállítani, amely így közvetett módon befolyásolja a statikus és dinamikus súrlódási erők arányát. A gerjesztést egy rugalmas elemen keresztül, szervomotorral tervezük megvalósítani. A csapágyak száraz állapotában statikus méréseket végeztünk a szükséges indítónyomaték meghatározására. Mivel ez nagyobb a vártnál, kenőanyagok alkalmazásával próbáljuk elérni azt az indítónyomatékot, ami még kezelhető.



9. ábra. Kísérleti berendezés a hidraulikus anyával.

Amennyiben kísérleteink sikeresek lesznek, tapasztalatainkat nemcsak a számítások igazolására tudjuk felhasználni. Olyan gépészeti berendezésekben, melyekbe az általunk használt csapágyat építik be és működésük során alternáló mozgást végeznek vagy üzem közben változik a csapágyelőfeszítés, előfordulhatnak kaotikus jelenségek. Például a hajócsavarok tengelyének ágyazása erre tipikus példa. A kísérletekkel kapcsolatos eredményeinket nemzetközi és hazai konferenciákon publikáltuk [21, 22].

A vizsgált rendszer sajátossága, hogy bizonyos szimmetrikus megoldások stabilitásvesztése után aszimmetrikus megoldások jelennek meg egyes paramétereknél. A lehetséges megoldás szakaszok megfelelő osztályozásával ún. követő algoritmust sikerült alkalmazni, amivel kimutattuk, hogy az aszimmetrikus megoldások ún. crossing-sliding bifurkáció során keletkeznek, majd egy nyereg-csomó bifurkáció után válnak stabilná – ez magyarázza a váltást a két megoldás típus között (10. ábra). Kutatásunk során megvizsgáltuk az



10. ábra. A megoldás típusok osztályozása (a) és a bifurkációs diagram (b).

oszcillátor viselkedését az ún. LuGre súrlódási modellel is. A kapott bifurkációs diagram jellege nagyon hasonló az egyszerű száraz súrlódásos modellel kapott eredményekhez, ami megerősíti azt a feltevést, hogy kísérleti úton is kimutathatók az aszimmetrikus illetve kaotikus megoldások.

Eredményeinket hazai és nemzetközi konferenciákon publikáltuk [23, 24]. Tervezzük egy további folyóirat cikk benyújtását is a *Meccanica* c. folyóirathoz az eddig csak konferenciákon publikált eredmények (tranzien káosz és követő módszer) alapján.

5. Összefoglalás

Az öt éves kutatómunka során a pályázatban megfogalmazott célok túlnyomó része megvalósult.

A *forgácsolási technológiák* vizsgálata során kidolgoztunk egy olyan numerikus módszert, amellyel változó hélix szögű marószerszámok esetében is megbízható stabilitási diagramok állíthatók elő. A módszer segítségével felfedezett stabilitási szigetek egészen új irányba terelték a kutatómunkát és nagyobb súly került a nemlineáris hatások, többek között a forgácsolás bistabil tulajdonságának vizsgálatára. A tervezett forgácsoló erő mérések egy másik, Dombóvári Zoltán vezetésével jelenleg futó OTKA pályázat keretében valósultak meg, bár más kontextusban. A forgácsoló erő pontosabb számítására lehetőséget nyújthat a forgácsképződés termomechanikai modellje, aminek nemlineáris vizsgálatával foglalkoztunk. Ez a modell jelentősen összetettebb mint a munkatervben megemlített polinomiális jellegű erőkarakterisztika, azonban nehezebb beépíteni a vizsgált megoszló időkézéses forgácsolási modellbe. A polinomiális erőkarakterisztika figyelembevételével bifurkációs vizsgálatok is történtek egy MSc diplomamunka keretében [25]. A szerszám és a munkadarab elválásához köthető nemsima bifurkáció stabilitásra gyakorolt hatását is elemeztük, az eredmények a gyakorlat számára is fontos következtetések levonását tették lehetővé. Kutatásaink a marás mellett a mélyfúrás stabilitásának vizsgálatára is kiterjedtek, a kutatási terven felül.

A *digitálisan szabályozott rendszerek* vizsgálata kapcsán egy kétdimenziós mikro-káosz leképezés esetében sikerült bizonyítani kaotikus megoldások létezését. A levezetés menétéből világosan látszik, hogy minden hasonló struktúrájú leképezés – tehát az egész mikro-káosz leképezés család – esetében triviális a Ljapunov-exponens pozitív voltának és egy véges attraktor létezésének kimutatása. Ezzel szemben a keverő tulajdonság bizonyítása

(topologikus tranzitivitás, sűrű periodikus pályák létezése) szinte minden leképezés esetében más technikát igényelne. Ezért a kaotikus viselkedés egyre nagyobb dimenziójú esetekre történő bizonyítása helyett a gyakorlat számára fontosabb tulajdonságok (maximális szabályozási hiba, egyszerre létező attraktorok száma) kimutatására és a fázistérbeli objektumok numerikus vizsgálatára helyeztük a hangsúlyt. Ennek keretében általánosítottuk a mikro-kaosz leképezést teljes állapotvisszacsatolású rendszerekre, megvizsgáltuk a száraz súrlódás hatását és kísérleti berendezést készítettünk a kaotikus rezgések kimutatására. A mikro-kaotikus rezgésekkel kapcsolatos energiafogyasztás – aminek a becslését terveztük – egyértelműen az attraktorok méretével hozható kapcsolatba, így ezt külön nem vizsgáltuk meg. A projekt során komoly numerikus eszköztár állt elő a mikro-kaosz leképezés vizsgálatára, mely szimulációk futtatásán kívül cella leképezéses algoritmusokat (egyszerű és általánosított cella leképezés), periodikus pálya keresést és kaotikus attraktorok jellemzőinek kiszámítását segítő rutinokat is tartalmaz.

A száraz súrlódású rendszerek vizsgálata kapcsán megtörtént az aszimmetrikus megoldásokhoz vezető bifurkációk – és további bifurkációk – azonosítása, valamint a kaotikus viselkedés bizonyítása. A bifurkáció analízist kiterjesztettük a LuGre súrlódási modellre is és az eredmények alapján kísérleti berendezést építettünk. Előkészületek történtek egy szalagon mozgó gerjesztett oszcillátor sokszög alakú attraktorának kísérleti kimutatására is, azonban ez a munka csupán hallgatói TDK [26] formájában történt meg és csak szabályos periodikus megoldásokat sikerült kimutatni. Egy szalagon csúszó súrlódásos oszcillátor és egy ütközéses probléma bifurkáció analízise is megvalósult követő módszer segítségével egy BSc szakdolgozat [27] és két MSc diplomamunka [28, 29] keretében. Ez utóbbi eredmények magas színvonala felveti a nemzetközi folyóirat publikáció lehetőségét. Az oszcillátor vizsgálata során előre nem tervezett területeken is történtek vizsgálatok. Ezek közül kiemelendő a tranziens kaosz kimutatása és szemi-analitikus vizsgálata közelítő leképezés segítségével.

A projekttel kapcsolatban négy impakt faktoros folyóirat cikk már megjelent vagy elfogadták, további két folyóirat cikk van benyújtva. Emellett számos további, eddig csak konferencián publikált eredmény folyóiratban történő megjelentetését tervezzük.

Hivatkozások

- [1] Zoltan Dombovari, Gabor Stepan: The Effect of Harmonic Helix Angle Variation on Milling Stability, (DETC2011-47745), Proceedings of the ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference IDETC/CIE 2011 August 29-August 31, 2011, Washington, DC, USA
- [2] Zoltan Dombovari, Gabor Stepan: The Effect of Helix Angle Variation on Milling Stability, ASME, Journal of Manufacturing Science and Engineering, October 2012, Vol. 134 / 051015
- [3] Jokin Munoa, Zoltan Dombovari, Iker Mancisidor, Yiqing Yang, and Mikel Zatarain: Interaction Between Multiple Modes in Milling Processes, Journal of Machining Science and Technology 17:165-180, 2013
- [4] Zoltan Dombovari, Gabor Stepan: On the Nonsmooth Dynamics of Conventional Milling Processes, In: H Ecker, A Steindl, S Jakubek (szerk.) ENOC 2014: Proceedings

- of 8th European Nonlinear Dynamics Conference. Konferencia helye, ideje: Bécs, Ausztria, 2014.07.06-2014.07.11. Vienna: Vienna University of Technology, 2014. 2p.
- [5] Gábor Csernák, Zoltán Pálmai: A simple nonlinear cutting model for the quick qualitative description of chip formation. 23rd International Congress on Theoretical and Applied Mechanics (ICTAM 2012), Beijing, China, 19-24 August, 2012.
- [6] Zoltan Dombovari, Gabor Stepan: Dynamics of Drill Bits with Cutting Edges of Varying Parameters, Proceedings of the ASME 2013 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference IDETC/CIE 2013 August 4-August 7, 2013, Portland, OR, USA
- [7] Gábor Csernák, Gábor Stépán: Sampling and Round-off, as Sources of Chaos in PD-controlled Systems, Proceedings of the 19th Mediterranean Conference on Control and Automation, June 20-23, Corfu, 2011.
- [8] Gábor Csernák, Gergely Gyebrószki, Gábor Stépán: Multi-baker Map as a Model of Digital PD Control. *Int. J. Bifurcat. Chaos*, 26(2), 2016
- [9] Gábor Csernák, Gábor Stépán: Disconnected Chaotic Attractors in Digitally Controlled Linear Systems, *Recent Researches in Automatic Control, Systems Science and Communications*, Proceedings of the 8th WSEAS International Conference on Dynamical Systems and Control, Published by WSEAS Press, ISBN: 978-1-61804-103-6, p. 97-102, 2012.
- [10] Gergely Gyebrószki, Gábor Csernák: Cell mapping methods for investigating micro-chaos In: *Investigating Dynamics in Engineering and Applied Science (IDEAS): Book of abstracts*. Konferencia helye, ideje: Budapest, Magyarország, 2014.07.03-2014.07.05.p. 1. (absztrakt és poszter).
- [11] Gergely Gyebrószki, Gábor Csernák: *Methods for the Quick Analysis of Micro-chaos, Applied Non-Linear Dynamical Systems in Springer Proceedings in Mathematics & Statics Vol 93.*, ISBN 978-3-319-08266-0, pp. 155-167, 2013.
- [12] Gergely Gyebrószki, Gábor Csernák: *Clustered Cell Mapping: an extension to the Simple Cell Mapping method*, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* (benyújtva).
- [13] Gábor Csernák, Gábor Stépán: *The state-space model of micro-chaos*, *Proc. the 2013 International Conference on Systems, Control, Signal Processing and Informatics*. Rhodes, p. 420-425, 2013.
- [14] Gábor Csernák: *Quantization-induced Control Error in a Digitally Controlled System*, *Nonlinear Dynamics* (benyújtva).
- [15] Gyebrószki Gergely, Csernák Gábor, Budai Csaba: *Experimental investigation of micro-chaos* In: H Ecker, A Steindl, S Jakubek (szerk.) *ENOC 2014: Proceedings of 8th European Nonlinear Dynamics Conference*. Konferencia helye, ideje: Bécs, Ausztria, 2014.07.06-2014.07.11. Vienna: Vienna University of Technology, 2014. Paper 476. 6 p. (ISBN:978-3-200-03433-4)

- [16] Gyebrószki Gergely, Csernák Gábor: Digitális szabályozás okozta kaotikus rezgés amplitúdójának becslése, In: Baksa Attila, Bertóti Edgár, Szirbik Sándor (szerk.) XII. Magyar Mechanikai Konferencia. Konferencia helye, ideje: Miskolc, Magyarország, 2015.08.25-2015.08.27. Miskolc: Miskolci Egyetem Gépészmérnöki és Informatikai Kar Műszaki Mechanikai Intézet, 2015. Paper 261. 6 p.
- [17] Gábor Licskó, Gábor Csernák: Chaos in a simply formulated dry-friction oscillator, CHAOS-2011 Proceedings of Chaotic Modeling and Simulation International Conference (CHAOS2011), Chania Crete (Greece) June, 1-5, 2011.
- [18] Gábor Licskó, Gábor Csernák: Chaos and transient chaos in a simple oscillator with Coulomb friction law, 4th IEEE International Conference on Nonlinear Science and Complexity, August 6-11, 2012, Budapest
- [19] Gabor Licsko, Gabor Csernak: On the chaotic behaviour of a simple dry-friction oscillator. Mathematics and Computers in Simulation, Vol. 95, pp. 55-62, 2014.
- [20] Gábor Licskó, Gábor Csernák: Chaotic transients in a simple frictional oscillator, GAMM 2013, Novi Sad, 2013. március 18-22.
- [21] Gábor Licskó, Gábor Csernák: Chaotic transients in a simple frictional oscillator, In: H Ecker, A Steindl, S Jakubek (szerk.) ENOC 2014: Proceedings of 8th European Nonlinear Dynamics Conference. Konferencia helye, ideje: Bécs, Ausztria, 2014.07.06-2014.07.11. Vienna: Vienna University of Technology, 2014. 2 p.
- [22] Licskó Gábor, Csernák Gábor: Kísérleti berendezés kaotikus viselkedés vizsgálatára száraz súrlódásos rendszerekben, XII. Magyar Mechanikai Konferencia, Miskolc, 2015. augusztus 25-27.
- [23] Csernák Gábor: Példák a követő módszer alkalmazására szakaszosan sima mechanikai rendszerek esetén, XII. Magyar Mechanikai Konferencia, Miskolc, 2015. augusztus 25-27.
- [24] Licskó Gábor, Csernák Gábor: Symmetry-breaking due to Coulomb friction, ECCOMAS Thematic Conference on Multibody Dynamics 2015. június 30-július 2.
- [25] Klára Bartha: Continuation and numerical bifurcation analysis of delayed systems MSc Final project in Mechanical Engineering Modelling, Supervisor: Dombóvári Zoltán, Budapest University of Technology and Economics, 2015.
- [26] Lukács Ferenc, Vajda Gábor: Forgó tárcsán rezgő, gerjesztett, súrlódásos oszcillátor vizsgálata, TDK dolgozat, konzulens: Csernák Gábor, BME Műszaki Mechanikai Tanszék, 2012.
- [27] Sziráki Mátyás: Nem sima mechanikai rendszerek mozgásának elemzése a CoCo szoftver segítségével, BSc szakdolgozat, konzulens: Csernák Gábor, BME Műszaki Mechanikai Tanszék, 2014.
- [28] Janka Gálai: Rocking and sliding blocks – examination of the effects of earthquakes by simple mechanical models, MSc Final project in Mechanical Engineering Modelling, Supervisor: Csernák Gábor, Budapest University of Technology and Economics, 2015.

- [29] Bence Borbély: Dynamical Investigation of Box Type Brush Systems, MSc diplomamunka (Alkalmazott mechanika mesterszak), témavezető: Csernák Gábor, BME Műszaki Mechanikai Tanszék, 2015.