

Részletes beszámoló a PD-83586 számú OTKA pályázat kutatási eredményeiről

A részletes beszámolóban a rövid összefoglaló felépítését követem, a []-ben álló számok a zárójelentés közleménylistájának megfelelő elemét jelölik.

Az extrémális gráfelmélet illetve halmazelmélet témájával foglalkozó cikkeim eredményeinek ismertetése.

A 1970-es évek elején Moser egy kérdését vizsgálva a következő általános problémát fogalmazta meg Erdős és Komlós: adott halmazrendszerek egy T tulajdonsága, mi az a legnagyobb szám $f(m, T)$, hogy bármely m halmazból álló rendszerből kiválasztható ekkora a T tulajdonsággal rendelkező részrendszer. Erdős és Komlós az uniómentesség tulajdonságára vizsgálta a fenti függvényt, majd eredményeiket (mások mellett) Erdős és Shelah javította, illetve ők vizsgálták először a kérdést a B_2 -mentesség tulajdonságára. Barát Jánossal, Füredi Zoltánnal, Ida Kantorral és Younjin Kimmel közösen [4] bebizonyítottuk Erdős és Shelah majdnem negyven éves sejtését, mely szerint bármely m halmazból kiválasztható $m^{\{2/3\}}$ nagyságrendű úgy, hogy ne legyen köztük 4 különböző A, B, C, D , amire az teljesülne, hogy A és B metszete C , és A és B uniója D (azaz B_2 -mentes). A két tulajdonság általánosításait is vizsgáltuk, illetve eredményeink különböző szemináriumokon és konferenciákon való előadása (én a 2011-es budapesti EuroComb'11 konferencián adtam elő) újból ráirányította a figyelmet erre a kérdéskörre és Fox, Lee és Sudakov igazolták Erdősék egy másik idevágó sejtését.

Az extrémális kombinatorika egy fontos témaköre az úgynevezett szaturálási problémák. Egy gráfot, hipergráfot, halmazrendszert szaturálnak mondunk valamilyen T tulajdonságra nézve, ha rendelkezik a T tulajdonsággal, de bármilyen új élt, hiperélt, halmazt hozzáadva ez már nem lesz igaz. Az általános probléma úgy fogalmazható, hogy mennyi élt, hiperélt, halmazt kell legalább tartalmaznia a struktúrának, hogy szaturált lehessen. [7]-ben ezt vizsgáltuk halmazrendszerek k -Sperner tulajdonságával kapcsolatban. Szintén megvizsgáltunk néhány kapcsolódó kérdést, az úgynevezett gyenge szaturálást, illetve a szaturálást abban az esetben, ha a halmazrendszerhez tartozó halmazok méretére valamiféle megkötésünk van. Ez utóbbi problémával kapcsolatban részlegesen megválasztuk Grützmüller, Hartmann, Kalinowski, Leck és Roberts egy kérdését. Nemrégiben jelent meg az arxiv-on Morrison, Noel és Scott cikke, melyben egy a cikkben kimondott sejtésünket megcáfolják, míg a gyenge szaturálási problémát egy polinomiális faktortól eltekintve megoldják. Módszereiket továbbgondolva talán az eredeti probléma is megoldható lesz. Az intézeti szemináriumokon kívül eredményeinket a kiotói Japán-Magyar Diszkrét Matematikai Szimpóziumon adtam elő.

Az extrémális kombinatorikában vizsgált tulajdonságok közül számos fogalmazható meg valamilyen tiltott részstruktúra segítségével. Nem annyira elterjedt, de gyakori annak vizsgálata, hogy mit mondhatunk, ha valamelyest engedünk a követelményekből, és nem azt akarjuk, hogy az adott struktúra ne jelenjen meg, hanem csak annyit, hogy kevés szer. Ezt a gyengítést is többféleképpen érhetjük el. Az általunk [2]-ben, [3]-ben és [9]-ben vizsgált metsző és Sperner-tulajdonságok esetében nem azt követeltük meg, hogy összesen kevés nem metsző illetve tartalmazásban álló pár legyen, hanem hogy minden halmazrendszerbeli halmazhoz kevés azt nem metsző illetve azzal tartalmazásban álló legyen. Egyik sejtésünket némileg általánosítva Scott és Wilmer azóta bebizonyította.

Egy halmazrendszert l -trace k -Spernernek nevezünk, ha az alaphalmazának tetszőleges k méretű részalmazán a rendszer nyoma (ide vett megszorítása) nem tartalmaz $k+1$ hosszú láncot. Ha l fix és

az alaphalmaz mérete nő, akkor a fogalom a 70-es évekbeli Sauer-lemma témaköréhez (illetve az azóta főleg Anstee és társszerzői által művelt forbidden configurations témakörhöz) kapcsolódik. Ha az alaphalmaz mérete és l különbsége fix, akkor ez Erdős k -Sperner halmazrendszerekről szóló tételének általánosítása (Erdős esete az, amikor l megegyezik az alaphalmaz méretével). Korábban megfogalmaztam egy sejtést, hogy ez utóbbi esetben a lehető legnagyobb l -trace k -Sperner rendszerek mindig a hiperkocka néhány középső szintjéből állnak. [1]-ben ezt a sejtést bizonyítottam aszimptotikusan tetszőleges l és k esetén, míg [6] az $l=n-1$ (n az alaphalmaz mérete) eset pontos bizonyítását tartalmazza. Halmazrendszerek nyomaival kapcsolatos eredményeimet a sanghaji JiaoTong University és a jinhuai Zhejiang Normal University kombinatorika szemináriumán illetve a 4. Lengyel Kombinatorikai Konferencián is előadtam.

[11]-ben azt vizsgáltuk, hogy uniform maximális metsző halmazrendszerek mennyire tudnak és mennyire kell nekik asszimmetrikusnak lenniük. Az asszimmetria mérésére szolgáló paraméternek a maximális és a minimális fokszám hányadosát választottuk. A rendszerbeli halmazok és az alaphalmaz mérete szerint több esetet különböztettünk meg, néhányánál sikerült aszimptotikusan optimális választokat adni.

[5] olyan halmazrendszeres problémákkal foglalkozik, ahol az alaphalmaz két részre van osztva, és a teljesítendő tulajdonság így fogalmazható meg. Az eredményeket a 2011-es Lisszaboni Kombinatorikai Konferencián adtam elő.

Vizer Mátéval metsző halmazrendszereket kombinatorikai (pozicionális) játékok szemszögéből vizsgáltuk [14]. Egy n elemű alaphalmaz k elemű részhalmazait választja felváltva két játékos úgy, hogy csak olyat használhatnak, amely minden korábban kiválasztottat elmetsz. A játék akkor ér véget, ha nincs már ilyen halmaz. Az egyik játékos célja, hogy a játék minél hamarabb befejeződjön, míg a másik minél inkább el szeretné nyújtani azt. Alsó és felső korlátokat adtunk a játék hosszára, ha feltételezzük, hogy mindkét játékos a számára lehető legjobb stratégiával játszik.

Az extrémális technikákat alkalmazó, de más kutatási területek problémáit megoldó eredmények bemutatása.

Többségi illetve relatív többségi problémákkal foglalkoztunk Gerbnerrel, Katonával és Pálvölgyivel [8]. Az alapprobléma a következő: adott n labda, mindegyik valamilyen színnel színezett, a színezés számunkra ismeretlen. A színek lehetséges száma c . Mutassunk olyan labdát, amelynek színe a leggyakoribb (relatív többség), illetve olyat, aminek színe több mint a labdák felénél szerepel (többség). Több modell létezik, hogy milyen kérdésekkel lehet információhoz jutni, mi a legegyszerűbbet, illetve legtöbbet kutatottat vizsgáltuk, amelyben egy kérdés két labdát jelöl meg, és az arra adott válasz azt mondja meg, hogy azok azonos színűek e. Adaptív és nem-adaptív esetben is több kérdést megválaszoltunk a feladat megoldásához szükséges minimális kérdésszámmal kapcsolatban. Mivel a feltett kérdéseket egy gráf éleivel lehet kódolni, így az extrémális gráfelméleti háttér nagy segítséget nyújtott. Így sikerült pl igazolni, hogy a nem-adaptív esetben a $c-1$ osztályú Turán-gráf éleinek megfelelő kérdések aszimptotikusan optimálisak. Az eredményeket a jinhuai Diszkrét Matematikai Konferencián és a Pisaban megrendezett EuroComb'13 konferencián adtam elő.

Héger Tamással és Takáts Marcellával [15] a kombinatorikus keresésmélet alapkérdésének (egy alaphalmaz ismeretlen elemét kell minél kevesebb igen-nem kérdéssel megtalálni) q -analógiáit vizsgáltuk, azaz az alaphalmaz egy véges test feletti n -dimenziós vektortér 1 -dimenziós alterei és az igen-nem kérdéseket reprezentáló részhalmazok a vektortér alterei. Az eredményeket a 2013-as 7. Cseh és Szlovák Gráfelméleti és Kombinatorikai Szimpóziumon illetve meghívott előadóként a 2014-es Szeged – Újvidék Kombinatorikai Műhelyen adtam elő.

A pályázatban a kutatás minden évére kértem pénzt külföldi kutató vendéglátására. Az első évben Ida Kantort, a prágai Károly Egyetem posztdoktori ösztöndíjasát fogadtam. Vele az (egyik) De Bruijn -Erdos-tétel általánosításaként megfogalmazott diszkrét geometriai Chen-Chvatal sejtés egy speciális esetét oldottuk meg [10]. Miután a Chen-Chvatal sejtés igen népszerű kutatási téma, így ezen cikkünkre is több hivatkozás érkezett (legtöbbje még megjelenés előtt áll, így csak a Google Scholarban látható, az mtmt hivatkozáslistában még nem).

Az általam szervezett Emléktábla Műhelyek valamelyikén született és egyéb eredmények bemutatása.

A pályázat futamidejének mindhárom évében szerveztem egy-egy Emléktábla Műhelyt. A második illetve harmadik évben a külföldi vendégkutató meghívására költhető keretet is az előadók magyarországi költségeinek fedezésére fordítottam. A Műhelyeken elkezdett kutatásokból született publikációkat az esemény honlapján (http://www.renyi.hu/~emlektab/index_booklet.html) gyűjtjük. Ezek közül a pályázati idő alatt született a beszámoló első részében említett [4] is. Egy többszerzős másik utatás [12] Avoider-Enforcer pozíciós játékokkal foglalkozik. A foksámjáték különböző változatainak „threshold bias”-ának nagyságrendjét határoztuk meg.

Kéthónapos kínai (Zhejiang University, Jinhua) vendégkutatásom során Xuding Zhuval (és Keszegh Balázzsal) dolgoztam együtt, az elért eredményeket [13] beküldtük publikálásra.