

Nemlineáris anticipatív dinamikai rendszerek a mechanikában (Kutatási jelentés)

1 Anticipáció, anticipatív rendszerek

Az anticipatív rendszer fogalma R. Rosen kutatásaihoz és könyvéhez kapcsolható. Eredetileg biológiai és szociológiai jelenségek modellezése során merült fel, azonban D.M. Dubois több esetben használta fizikai, illetve szabályozástechnikai problémák vizsgálatában is.

Az anticipatív rendszer lehet gyenge vagy erős. Egy gyenge anticipatív rendszer olyan, hogy tartalmazza saját modelljét, amelynek a segítségével meghatározza a saját jövőbeli állapotát, és ezt a „jóslatot” felhasználja önmaga irányítására. Ez a definíció lényegében Rosen anticipatív rendszer fogalmával egyezik meg.

Dubois elméletét követve diszkrét idejű rendszereket tekintünk, és használjuk az általa bevezetett matematikai megfogalmazást (computing anticipatory systems). Eszerint a rendszer jelen (időpontban vett) állapota x_i , a belső modell által számított jövőbeli állapot \hat{x}_{i+1} . A következő időpillanatban a rendszer állapota x_{i+1} .

Így a
gyenge anticipatív rendszer

$$x_{i+1} = f(x_i, \hat{x}_{i+1}), \quad (1)$$

a rekurzív rendszer

$$x_{i+1} = f(x_i),$$

az időképlettel rendelkező rendszer

$$x_{i+1} = f(\dots, x_{i-1}, x_i).$$

Az erősen anticipatív rendszer

$$x_{i+1} = f(x_i, x_{i+1}),$$

végül a legáltalánosabb időképlettel rendelkező és erősen anticipatív rendszer

$$x_{i+1} = f(\dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots).$$

A gyenge és erős anticipatív rendszereket Dubois annak alapján különbözteti meg, hogy az (1)-ből a kalap eltűnik az x_{i+1} -ről, azaz azonosítja a modell által számított és a valóságos jövőbeli állapotot. Ez ugyan furcsának tűnhet, de például szabályozott mechanikai rendszereket leíró diszkrétizált matematikai modellekben gyakran előfordul (gyorsulás-szenzor hatása).

Az anticipatív rendszerek egy speciális formája az inkurzív rendszer

$$x_{i+1} = f(x_{i+1}).$$

2 Folytonos és diszkrét rendszerek

Folytonos és diszkrét rendszerek lehetnek időben vagy térben. Térben diszkrét rendszer például anyagi pontrendszer, merev testekből álló mechanikai rendszer, illetve egy kontinuum véges-elemes diszkretizációja után kialakult rendszer. Időben diszkrét rendszer diszkretizáció hatására jön létre egy folytonos idejű rendszerből diszkrét időpontban történt mérés, vagy valamely numerikus módszer alkalmazása során lefolytatott diszkretizáció útján.

Kutatásainkban diszkrét idejű rendszereket vizsgáltunk, mivel a Dubois által bevezetett fogalmak és képletek ilyen esetekben alkalmazhatóak. A munka során felmerült, hogy egy folytonos idejű rendszer időben végrehajtott diszkretizációja milyen változásokat okoz a stabilitási tulajdonságokban.

A térben diszkrét rendszerek közé tartoznak az anyagi pontok, illetve pontrendszerek, illetve ide soroljuk a merev testeket és azok rendszerét is. A jellemző tulajdonság a véges szabadságfok. Velük szemben beszélünk kontinuumokról, melyeknél az anyag folytonosan tölti ki a számára rendelkezésre álló térrészt. Ezek szabadságfoka végtelen.

3 A lefolytatott kutatás főbb irányai, módszere és eredménye

A kutatás a mechanikai rendszerekben megjelenő anticipatív hatásokra, és az ezek következtében észlelhető jelenségekre koncentrált. Anticipatív hatás időben lezajló folyamatot feltételez, ami mechanikai értelemben mozgás. A megfelelő tudományterület értelemszerűen a dinamika.

A műszaki mechanika dinamikai rendszerei eredendően nemlineárisak, azonban tanulmányozásuk első lépése linearizálás, és a linearizált rendszer vizsgálata. A nemlineáris rendszer vizsgálata lehet analitikus vagy numerikus. A numerikus vizsgálat időben diszkrét lehet csak, idő lépéseket kell felvenni. Ezek nagysága sok esetben igen problematikus.

Kutatásainkban arra koncentráltunk, hogy a folytonos és diszkrét idejű rendszerek tulajdonságai miként viszonyulnak egymáshoz. Előtérbe állítottuk a stabilitást, mint alapvető dinamikai tulajdonságot.

3.1 Véges szabadságfokú rendszerek

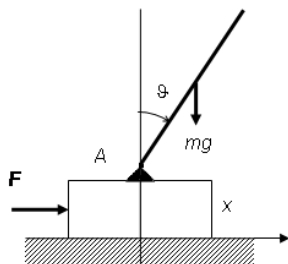
A kutatás során azt vizsgáltuk, hogy az anticipatív hatások miként jelentkeznek a mechanika területén alkalmazott modellekben. Vizsgáltuk továbbá, hogy mi a hatása az anticipációnak a rendszerek stabilitására.

A digitálisan szabályozott véges szabadságfokú rendszerek területén megtartottuk az analitikus vizsgálati módszert, és a szabályozó rendszer, illetve a mechanikai rendszer viselkedését leíró változó függvények és differenciálegyenletek számának hatását vizsgáltuk. Az analitikus mechanikában közismert, hogy a mechanikai rendszerek mozgásegyenleteit többféle módon írhatjuk fel. Az egyes eljárások eredményeként természetesen ekvivalens egyenletrendszerek adódnak, de a skalár változók és függvények száma eltérő lehet (például az elsőfajú, illetve a másodfajú Lagrange egyenletnél).

Amennyiben a digitális szabályozás miatt a folytonos idejű mechanikai rendszer diszkrétizációja szükséges, az előbbieken említett ekvivalencia felbomolhat, és kritikus stabilitási helyzeteknél kvalitatív eltérés is adódhat a diszkrét rendszerek viselkedésében. Azt találtuk, hogy sok esetben az eltérést a rejtett anticipatív jelleg okozza.

Rejtett anticipatív hatások jelentkezhetnek akkor, amikor egy mechanikai rendszerben a szabályozás hatását kényszerként vesszük figyelembe. A mozgásegyenlet felírása ilyenkor egyszerűbb, de a szabályozás automatikusan feed-in-time jellegű inkurzív. Ez nagyon sok esetben nem okoz semmi változást a stabilitási tulajdonságokban, azonban kritikus pontok körül megváltoztathatja a kvalitatív tulajdonságokat.

A kutatásaink során szerzett fenti tapasztalatainkat egy közismert példán keresztül mutatjuk be. Egy rendszert az instabil egyenúlyi helyzete körül kell szabályozás útján stabilizálni.



1.Ábra. Inverz inga egyensúlyozása

A mozgásegyenlet

$$\frac{1}{3} m l^2 \ddot{\vartheta} + \frac{1}{2} m l \ddot{x} \cos \vartheta - \frac{1}{2} m g l \sin \vartheta = 0 \quad (2)$$

$$m \ddot{x} + \frac{1}{2} m l \ddot{\vartheta} \cos \vartheta - \frac{1}{2} m l \dot{\vartheta}^2 \sin \vartheta = F \quad (3)$$

ahol az x pozíció és az ingának a függőleges iránytól mért ϑ szöge a két általános koordináta. A (3) egyenlet jobb oldalán álló F erő egy PD szabályzó mellett a legáltalánosabb esetben

$$F (\equiv Q(t - \tau)) = c_1 \dot{\vartheta}(t - \tau) + c_0 \vartheta(t - \tau), \quad (4)$$

alakban írható. Figyelembe vettük, hogy a mért ϑ , $\dot{\vartheta}$ értékek hatására a szabályozás válaszaként létrejövő beavatkozás (az F erő) véges τ idő eltelte után jelentkezhet csak. Így a (4)-ben

$$F = Q(t - \tau). \quad (5)$$

Amennyiben a késedelmet elhanyagoljuk ($\tau = 0$) a beavatkozás azonnal a mérésrel egyidőben jelentkezik, ami anticipatív jellegű

$$F = Q_A(t). \quad (6)$$

A szabályozás hatását két módon vehetjük figyelembe. Egyrészt törekedhetünk arra, hogy minél kevesebb egyenlettel és változóval írjuk le a mozgást. Ezt a megközelítést akkor alkalmazzuk, ha analitikus vizsgálatot akarunk lefolytatni.

A vizsgált esetben \ddot{x} -ot kifejezhetjük (3)-ból, és behelyettesíthetjük (2)-be,

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{3 \sin \vartheta \cos \vartheta}{4 - 3 \cos^2 \vartheta} \dot{\vartheta}^2 + \frac{6 g \sin \vartheta}{(4 - 3 \cos^2 \vartheta) l} - \frac{\cos \vartheta}{(4 - 3 \cos^2 \vartheta) m l} F(t) \quad (7)$$

$$F(t) = c_1 \dot{\vartheta}(t - \tau) + c_0 \vartheta(t - \tau).$$

Ha behelyettesítjük F -et (7) második sorából az elsőbe, akkor egyetlen másodrendű differenciálegyenletünk lesz az egyetlen ϑ általános koordinátára, mint független változóra.

A másik lehetőséget akkor szokás alkalmazni, amikor az egyenletek és az ismeretlenek számának minimalizálása nem érdekes szempont, például numerikus analízist akarunk végezni. Most megtartjuk az x , ϑ általános koordinátákat és a (4)-ben kifejezett F erőt is mint változót, és az alábbi egyenletrendszert használjuk:

$$\begin{aligned} \ddot{\vartheta} &= \frac{3 l \dot{x}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta - 6 g \sin \vartheta}{(-4 + 3 \cos^2 \vartheta) l} + \frac{6 F \cos \vartheta}{(-4 + 3 \cos^2 \vartheta) m l} \\ \ddot{x} &= \frac{3 g \sin \vartheta \cos \vartheta - 2 l \dot{x}^2 \sin \vartheta}{(-4 + 3 \cos^2 \vartheta)} - \frac{4 F}{(-4 + 3 \cos^2 \vartheta) m} \\ F(t) &= c_1 \dot{\vartheta}(t - \tau) + c_0 \vartheta(t - \tau). \end{aligned} \quad (8)$$

Ha az időkéésés hatásától eltekintünk ($\tau = 0$) a (7) második sorában, akkor egy inkurzív (feed-in-time) rendszert kapunk:

$$F(t) = c_1 \dot{\vartheta}(t) + c_0 \vartheta(t).$$

Mindez még sokkal nyilvánvalóbb lesz a $t \in [t_0, t_1, \dots, t_i, \dots]$ diszkrét idejű esetben

$$F(t_i) = c_1 \dot{\vartheta}(t_i) + c_0 \vartheta(t_i). \quad (9)$$

Tegyük fel, hogy

$$t_i = t_0 + i \Delta t, \quad \text{ahol } i = 1, 2, \dots,$$

továbbá legyen az időkézés a diszkrét idő lépésközével egyenlő $\tau = \Delta t$, akkor (7) második sora egy rekurzív formulára vezet

$$F(t_i) = c_1 \dot{\vartheta}(t_{i-1}) + c_0 \vartheta(t_{i-1}).$$

Diszkrét idejű rendszereknél a (7), (6) és (8) egyenletekből differencia-egyenleteket származtatunk. Ennek érdekében vezessünk be új változókat:

$$y_1 = \vartheta, \quad y_2 = \dot{\vartheta}, \quad y_3 = x, \quad y_4 = \dot{x}, \quad y_5 = F$$

és alkalmazzuk a következő jelölést

$$y_k(i) = y_k(t_i) \quad (k = 1, 2, \dots, 5).$$

Ezután az inkurzív (feed-in-time) eset ($\tau = 0$) a (6) és (9) felhasználásával

$$\begin{aligned} y_1(i+1) &= y_1(i) + \Delta t y_2(i) \\ y_2(i+1) &= y_2(i) + \left(-\frac{3 \sin y_1(i) \cos y_1(i)}{4 - 3 \cos^2 y_1(i)} (y_2(i))^2 + \frac{6 g \sin y_1(i)}{(4 - 3 \cos^2 y_1(i)) l} \right. \\ &\quad \left. - \frac{6 \cos y_1(i)}{(4 - 3 \cos^2 y_1(i)) m l} y_5(i) \right) \Delta t \\ y_5(i+1) &= c_1 y_2(i+1) + c_0 y_1(i+1) \end{aligned} \quad (10)$$

vagy egyszerűsítve

$$\begin{aligned} y_1(i+1) &= y_1(i) + \Delta t y_2(i) \\ y_2(i+1) &= y_2(i) + \left(-\frac{3 \sin y_1(i) \cos y_1(i)}{4 - 3 \cos^2 y_1(i)} (y_2(i))^2 + \frac{6 g \sin y_1(i)}{(4 - 3 \cos^2 y_1(i)) l} \right. \\ &\quad \left. - \frac{6 c_1 \cos y_1(i)}{(4 - 3 \cos^2 y_1(i)) m l} y_2(i) - \frac{6 c_0 \cos y_1(i)}{(4 - 3 \cos^2 y_1(i)) m l} y_1(i) \right) \Delta t. \end{aligned} \quad (11)$$

Vessük össze a (10) és a (11) rendszereket. Az utóbbi ránézésre rekurzív, azonban a vele ekvivalens (10) rendszerben jól látszik az inkurzív feed-in-time kontroll. Itt tehát egy rejtett anticipatív rendszerről van szó.

A (8) egyenletrendszerből a fentiekhez hasonlóan időbeli diszkrétizációval levezethető az „igazi” rekurzív rendszer is:

$$\begin{aligned} y_1(i+1) &= y_1(i) + \Delta t y_2(i) \\ y_2(i+1) &= y_2(i) + \left(\frac{3 y_4^2(i) l \sin y_1(i) \cos y_1(i) - 6 g \sin y_1(i)}{(-4 + 3 \cos^2 y_1(i)) l} \right. \\ &\quad \left. + \frac{6 \cos y_1(i) y_5(i)}{(-4 + 3 \cos^2 y_1(i)) m l} \right) \Delta t \\ y_3(i+1) &= y_3(i) + \Delta t y_4(i) \\ y_4(i+1) &= y_4(i) + \left(\frac{3 g \sin y_1(i) \cos y_1(i) - 2 y_4^2(i) l \sin y_1(i)}{(-4 + 3 \cos^2 y_1(i))} \right. \\ &\quad \left. - \frac{4 y_5(i)}{(-4 + 3 \cos^2 y_1(i)) m} \right) \Delta t \\ y_5(i+1) &= c_1 y_2(i) + c_0 y_1(i) \end{aligned} \quad (12)$$

3.2 Stabilitásvizsgálat véges szabadságfokú anticipatív és rekurzív rendszer esetében

Véges szabadságfokú mechanikai rendszerek kutatása során a legegyszerűbb esetben egy lineáris algebrai operátor sajátértékeit kell meghatározni. Pontosabban annak feltételeit keressük, hogy mikor esnek ezek a komplex sík egység sugarú körének belsejébe. Ezzel a módszerrel megrajzolható és összehasonlítható például egy digitális szabályzással stabilizált véges szabadságfokú mechanikai rendszer rekurzív és inkurzív (anticipatív) modelljének viselkedése, ahogy ezt egy inverz inga esetén elvégeztük.

A stabilitásvizsgálatban a rendszerekhez definiált lineáris operátorok λ_i sajátértékeit számítjuk ki. Az anticipatív rendszerrel a (11) egyenletből a

$$\begin{aligned} y_1(i+1) &= y_1(i) + \Delta t y_2(i), \\ y_2(i+1) &= y_2(i) + \left(+\frac{6g y_1(i)}{l} \right. \\ &\quad \left. - \frac{6c_1}{ml} y_2(i) - \frac{6c_0}{ml} y_1(i) \right) \Delta t, \end{aligned}$$

linearizálás után az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 6 \frac{\Delta t g}{l} - 6 \frac{c_0 \Delta t}{ml} & 1 - 6 \frac{c_1 \Delta t}{ml} \end{bmatrix}$$

lineáris operátort kapjuk. Ennek karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + 2 \frac{(-ml + 3c_1 \Delta t)}{ml} \lambda - \frac{6(\Delta t)^2 gm - 6(\Delta t)^2 c_0 - ml + 6c_1(\Delta t)}{ml} = 0.$$

A megoldások

$$\lambda_{1,2} = 1 - 3 \tilde{c}_1 \Delta t \pm \sqrt{(3 \tilde{c}_1 \Delta t)^2 + 6(\Delta t)^2(\alpha^2 - \tilde{c}_0)}, \quad (13)$$

ahol

$$\tilde{c}_1 = \frac{c_1}{ml}, \quad \tilde{c}_0 = \frac{c_0}{ml} \quad \text{és} \quad \alpha^2 = \frac{g}{l}.$$

A stabilitási feltétel teljesül, ha (13) megoldásaira

$$|\lambda| < 1.$$

A (12) rekurzív rendszer esetében a stabilitásvizsgálatban alkalmazott lineáris operátor alakja

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 & 0 & 0 \\ 6 \frac{\Delta t g}{l} & 1 & 0 & 0 & -6 \frac{\Delta t}{ml} \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t & 0 \\ -3 \frac{\Delta t g}{l} & 0 & 0 & 1 & 4 \frac{\Delta t}{m} \\ c_0 & c_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ennek a karakterisztikus egyenlete

$$\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) = 0, \quad (14)$$

ahol I az identitás operátort jelöli. Vezessük be az

$$\varepsilon = -1 + \lambda$$

jelölést, ekkor (14) alakja

$$\det \begin{bmatrix} -\varepsilon & \Delta t & 0 & 0 & 0 \\ 6 \frac{\Delta t g}{l} & -\varepsilon & 0 & 0 & -6 \frac{\Delta t}{ml} \\ 0 & 0 & -\varepsilon & \Delta t & 0 \\ -3 \frac{\Delta t g}{l} & 0 & 0 & -\varepsilon & 4 \frac{\Delta t}{m} \\ c_0 & c_1 & 0 & 0 & -\varepsilon - 1 \end{bmatrix} = 0.$$

A determináns kifejtése után

$$\varepsilon^5 + \varepsilon^4 - 6 \frac{\Delta t (-c_1 + \Delta t g m) \varepsilon^3}{ml} - 6 \frac{(\Delta t)^2 (-c_0 + g m) \varepsilon^2}{ml} = 0.$$

Az $\varepsilon = 0$ megoldás, így a $\lambda = 1$ egy kétszeres multiplíciasú gyök, ami a haladó mozgáshoz tartozó megoldást jellemzi. Az egyensúlyozás stabilitása szempontjából a lényeges rész a „maradék”

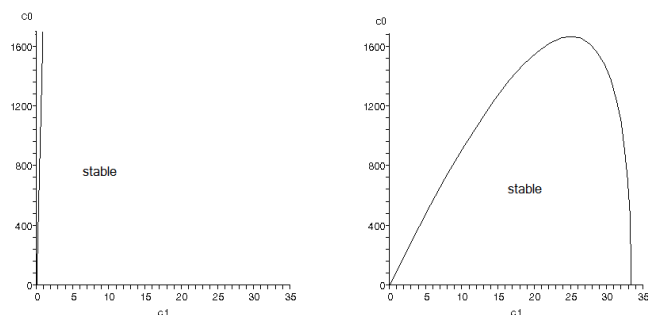
$$(-1 + \lambda)^3 + (-1 + \lambda)^2 - 6 \frac{\Delta t (-c_1 + \Delta t g m) (-1 + \lambda)}{ml} - 6 \frac{(\Delta t)^2 (-c_0 + g m)}{ml} = 0.$$

Ezt a harmadfokú egyenletet kell λ -ra megoldani a stabilitásvizsgálathoz.

Ha rögzítjük $\Delta t = 0.005$ és $\alpha = 1$ értékeket, a megoldandó egyenlet

$$(-1 + \lambda)^3 + (-1 + \lambda)^2 - 6 (0.005 - \tilde{c}_1) (-1 + \lambda) + 0.000150 \tilde{c}_0 - 0.000150 = 0 \quad (15)$$

A megoldásokat a $c_0 = \frac{c_0}{ml}$ és $c_1 = \frac{c_1}{ml}$ paraméterek függvényében rajzoltuk fel a 2. Ábrán.



2. Ábra. Stabilitási térkép anticipatív és rekurzív rendszer esetén

Itt jól látszik, hogy az anticipatív és a rekurzív rendszer stabilitási szempontból eltérő viselkedést mutat a paramétertartomány széleinél.

3.3 Végtelen szabadságfokú rendszerek

A vizsgálatokat kiterjesztettük végtelen szabadságfokú rendszerek (kontinuumok) esetére is. Megvizsgáltuk, hogy a kontinuum mechanika „rate dependent” - „rate independent” anyagmodelljei miként befolyásolják az anyagi instabilitási problémák numerikus analízisét. A szilárd testek mechanikájában a kontinuum alapegyenletei: a Cauchy-féle mozgásegyenletek, a kinematikai egyenletek

$$\rho \dot{v} = \sigma_x \quad (16)$$

$$\dot{\epsilon} = v_x \quad (17)$$

és az anyagtörvény mind parciális differenciálegyenletek. Itt az alsó index parciális deriváltat jelöl,

$$\sigma_x = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \dots$$

A legegyszerűbb anyagtörvény a σ feszültség és ϵ alakváltozás lineáris kapcsolatát feltételező Hooke törvény, illetve ennek általánosítása

$$\sigma = K \epsilon \quad (18)$$

alakban, ahol K már nem a Young modulus, hanem a szakítógögre megfelelő pontjához tartozó érintő merevség. Az anyagtörvény övekményes alakban

$$d\sigma = K d\epsilon.$$

Amennyiben dinamikai feladat numerikus megoldását szeretnénk előállítani, egy véges Δt időlépés bevezetése szükséges. A lineáris anyagtörvényt időben diszkrétizálva

$$\Delta \sigma = K \Delta \epsilon,$$

ahol

$$\Delta \sigma = \sigma_{i+1} - \sigma_i$$

és

$$\sigma_i = \sigma(t_i).$$

Ezután

$$\sigma_{i+1} - \sigma_i = K (\epsilon_{i+1} - \epsilon_i),$$

vagy

$$\sigma_{i+1} = K \epsilon_{i+1}, \quad (19)$$

ami egy inkurzív formula.

A kontinuum alapegyenleteinek másik két eleme, (16) és (17)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial x},$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Írjuk át ezeket is növményes alakba,

$$dv = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial x} dt$$

és

$$d\varepsilon = \frac{\partial v}{\partial x} dt.$$

Ezután az időbeli diszkretizáció végrehajtható

$$v_{i+1} = v_i + \left. \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right|_i \Delta t, \quad \varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_i \Delta t \quad (20)$$

Az egyenletekhez (19)-et hozzávéve kapjuk a kontinuum mozgását leíró időben diszkretizált egyenletrendszert, ami egy erősen anticipatív (inkurzív) rendszert eredményez.

Amennyiben a diszkretizálás előtt (16), (17)-be behelyettesítjük az anyagtörvényt

$$\rho \dot{v} = K \varepsilon_x$$

$$\dot{\varepsilon} = v_x,$$

és az így

$$v_{i+1} = v_i + \left. \frac{K}{\rho} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right|_i \Delta t, \quad \varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_i \Delta t$$

adódik. Mátrix alakban most egy rekurzív formulát kapunk, de az anyagtörvény inkurzív, ezért a

$$\begin{bmatrix} v_{i+1} \\ \varepsilon_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{K}{\rho} \Delta t \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \\ \Delta t \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ \varepsilon_i \end{bmatrix}$$

képlet rejtett anticipatív jellegű, hasonlóan a bemutatott véges szabadságfokú esethez.

3.4 Stabilitásvizsgálat végtelen szabadságfokú anticipatív és rekurzív rendszer esetében

Ilyenkor is egy diszkrét dinamikai rendszer vizsgálata jelentkezik, de itt az algebrai operátorok helyett differenciáloperátorok spektrumainak a meghatározása szükséges. Azt találtuk, hogy a „rate independent” anyagmodellek anticipatív jellegű diszkrét dinamikai rendszerekre vezetnek.

Az előző szakaszban felírt rekurzív formulában szereplő operátor

$$M := \begin{bmatrix} 1 & \frac{K}{\varrho} \Delta t \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \\ \Delta t \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) & 1 \end{bmatrix}.$$

Ennek karakterisztikus egyenlete λ -ra

$$M u - \lambda u = 0,$$

ahol u a homogén peremfeltételeket kielégítő függvény. A stabilitási feltétel

$$|\lambda| < 1.$$

Az egyszerűség kedvéért szorítsuk le a vizsgálatot periodikus perturbációkra, azaz legyen

$$u = \begin{bmatrix} v_0 \\ \varepsilon_0 \end{bmatrix} \exp(i \alpha x). \quad (21)$$

Ekkor a karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 - 2 \lambda + 1 + \alpha^2 \frac{K}{\varrho} (\Delta t)^2 = 0,$$

amelynek megoldásai

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{4 - 4 \left(1 + \alpha^2 \frac{K}{\varrho} (\Delta t)^2 \right)}}{2},$$

azaz

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \alpha \Delta t \sqrt{-\frac{K}{\varrho}}. \quad (22)$$

Ha $K > 0$, akkor (22) komplex szám. Ennek abszolútértéke

$$|\lambda_{1,2}| = \sqrt{1 + \frac{K}{\varrho} \alpha^2 (\Delta t)^2} > 1. \quad (23)$$

Ha $K = 0$, akkor

$$|\lambda_{1,2}| = 1,$$

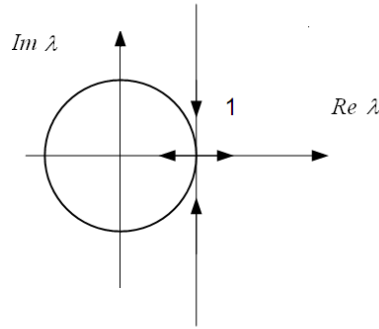
végül ha $K < 0$, akkor

$$\lambda_1 = 1 - \alpha \Delta t \sqrt{-\frac{K}{\varrho}} < 1, \quad \lambda_2 = 1 + \alpha \Delta t \sqrt{-\frac{K}{\varrho}} > 1. \quad (24)$$

Összehasonlítva $(\lambda_{1,2})^2$ -et (23)-ból és λ_2^2 -t (24)-ből,

$$r_1^2 := 1 + \frac{K}{\varrho} \alpha^2 (\Delta t)^2 \quad \text{és} \quad r_2^2 := 1 + 2\alpha \Delta t \sqrt{-\frac{K}{\varrho}} + \frac{K}{\varrho} \alpha^2 (\Delta t)^2.$$

Így ha $\Delta t \rightarrow 0$, akkor $\lim r_1^2 < \lim r_2^2$. Tehát mindkét esetben instabil a rendszer. Ha $K = 0$, akkor a lineáris rendszer a stabilitás határán van.



3. Ábra. A karakterisztikus gyökök helyének változása anticipatív anyagtvénynél

A 3. Ábrán jól látszik, hogy az anticipatív rendszer (egyetlen pont kivételével) instabil.

Általában egy műszaki mechanikai feladat nemlineáris, lineáris probléma az eredeti feladat linearizálása, azaz közelítés során adódik. A 3. Ábrán szereplő lineáris eset nem ad információt a feltételezett „eredeti” nemlineáris rendszer viselkedésére. Az, hogy a gyökök éppen az egységkört érintő függőleges egyenesen mozognak, az egyenletek tetszőlegesen kicsi megváltoztatása (lényegében bármilyen nemlineáris tag hozzáadása) esetén már nem áll fenn. Az ilyen helyzetet az alkalmazott matematikai szakirodalom nem tipikusnak nevezi, és matematikai modellként alkalmatlannak ítéli. Tehát a (18) anyagtvény (mely anticipatív rendszerre vezetett) alkalmazása nem szerencsés.

Válasszunk egy kissé bonyolultabb anyagtvénnyt, amely tartalmaz egy a $\dot{\sigma}$ feszültségi fluxustól függő tagot is (stress-rate dependent material)

$$\sigma + D \dot{\sigma} = K \varepsilon. \quad (25)$$

Kis átrendezéssel (25)

$$\dot{\sigma} = \frac{K}{D} \varepsilon - \frac{1}{D} \sigma,$$

illetve növekményes alakban

$$d\sigma = \frac{K}{D} \varepsilon dt - \frac{1}{D} \sigma dt.$$

A korábbiakhoz hasonlóan a diszkrétizált konstitutív egyenlet

$$\Delta \sigma = \frac{K}{D} \varepsilon_i \Delta t - \frac{1}{D} \sigma_i \Delta t,$$

azaz

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i - \frac{1}{D} \sigma_i \Delta t + \frac{K}{D} \varepsilon_i \Delta t.$$

Ez az egyenlet a (20) diszkrétizált alakokkal együtt a következő tisztán rekurzív rendszert adja:

$$\begin{bmatrix} v_{i+1} \\ \varepsilon_{i+1} \\ \sigma_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\varrho} \Delta t \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \\ \Delta t \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) & 1 & 0 \\ 0 & \frac{K}{D} \Delta t \left(1 - \frac{1}{D} \Delta t \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ \varepsilon_i \\ \sigma_i \end{bmatrix}.$$

A stabilitás vizsgálatban szereplő lineáris operátor ebben az esetben

$$Mu := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\varrho} \Delta t \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \\ \Delta t \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) & 1 & 0 \\ 0 & \frac{K}{D} \Delta t \left(1 - \frac{1}{D} \Delta t \right) \end{bmatrix} u.$$

Alkalmazzuk most is a (21) periodikus perturbációs leszorítást. Ekkor a karakterisztikus egyenlet

$$\exp(i\alpha x) \begin{bmatrix} (1-\lambda) & 0 & \frac{1}{\varrho} \Delta t (i\alpha) \\ \Delta t (i\alpha) & (1-\lambda) & 0 \\ 0 & \frac{K}{D} \Delta t \left(1 - \frac{1}{D} \Delta t - \lambda \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ \varepsilon_0 \\ \sigma_0 \end{bmatrix} = 0,$$

illetve

$$(1-\lambda)^2 \left((1-\lambda) D - \Delta t \right) - \alpha^2 \frac{K}{\varrho} (\Delta t)^3 = 0. \quad (26)$$

Ez λ -ban harmadfokú, és itt már lehetséges stabilitás, illetve tipikus viselkedés.

3.5 Aszimptotikus anticipáció

Végezetül vizsgáljuk meg az anticipatív jellegnek és a reguláris hullámterjedésnek a viszonyát. Válasszunk egy még általánosabb anyagtvényt, amely tartalmaz az $\dot{\varepsilon}$ alakváltozási sebességtől és a feszültségi fluxustól függő tagot is

$$\sigma + D\dot{\sigma} = K\varepsilon + H\dot{\varepsilon}.$$

Az időben folytonos rendszerhez tartozó karakterisztikus egyenlet

$$(-\lambda)^2 \left(-\lambda - \frac{1}{D} \right) - \lambda k^2 \frac{H}{\varrho D} - k^2 \frac{K}{\varrho D} = 0. \quad (27)$$

Most a stabilitási feltétel

$$\operatorname{Re} \lambda < 0,$$

hiszen folytonos idejű rendszert vizsgálunk. Ha áttérünk, az előző szakaszokban bemutatott módon, diszkrét idejű rendszerre, akkor annak a karakterisztikus egyenlete

$$(1 - \mu)^2 \left((1 - \mu) - \frac{\Delta t}{D} \right) + (1 - \mu) k^2 \frac{H}{\rho D} (\Delta t)^2 - k^2 \frac{E}{\rho D} (\Delta t)^3 = 0. \quad (28)$$

Hasonlítsuk össze a folytonos rendszer λ sajátértékeit a diszkrét rendszer μ sajátértékeivel a (27), (28) egyenletek alapján. Így

$$1 - \mu = -\lambda \Delta t.$$

Jelölje β és α a λ sajátérték valós és képzetes részeit. Ezzel a diszkrét idejű rendszer sajátértékeire

$$\mu = \beta \Delta t + 1 - i \alpha \Delta t.$$

Tegyük fel, hogy a folytonos idejű rendszer stabil,

$$\beta < 0.$$

Ezen felül a diszkrét rendszer stabilitásához egy további

$$\alpha^2 (\Delta t)^2 < 1 - (\beta \Delta t + 1)^2 \quad (29)$$

feltételnek is teljesülnie kell.

Vessük most össze a periodikus perturbáció és a hullám megoldás formuláit:

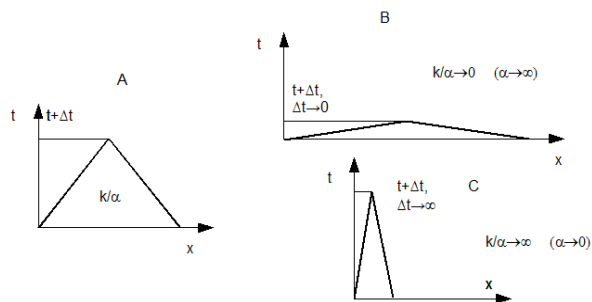
$$\begin{aligned} \exp \lambda t \exp i k x &= \exp \beta t \exp (-i \alpha t) \exp i k x \\ &= \exp \beta t \exp i (k x - \alpha t) \end{aligned}$$

A harmonikus hullám karakterisztikáit a

$$k x - \alpha t = \text{állandó}$$

képlet adja (4. Ábra. A része).

Aszimptotikus anticipáció esetén $\alpha \rightarrow \infty$. Ilyenkor előállhat az, hogy stabil folytonos rendszer instabil viselkedést mutat numerikus vizsgálat során. Ez azért történhet, mert (29) nem teljesül $\alpha^2 \gg |\beta|$ miatt.



4. Ábra Hullámkarakterisztikák (A), asimptotikus anticipáció (B), asimptotikus időkéés (C)

Hullámdinamikai szemléletben az aszimptotikus anticipáció a végtelen terjedési sebességnek megfelelő eset. Vannak a gyakorlatban is elterjedt anyagtörvények, amelyeknél ilyen sebesség adódik. A vizsgálatainkból látható, hogy az ilyen konstitutív egyenletek csak igen korlátozottan alkalmazhatók, például stabilitásvizsgálatra nem.

4 A legfontosabb kutatási eredmények összefoglalása

A rendszerelméletben bevezetett és egyre elfogadottabbá váló anticipatív rendszer fogalom megjelenik a műszaki mechanikában is. Egy speciális anticipatív rendszer az inkurzív rendszer. Általában mechanikai rendszerekben az inkurzív hatások rejtetten jelentkeznek, azok matematikai modellezése során.

Ilyen eset lép fel, amikor egy szabályozott rendszer numerikus analízisét végezzük. Erre példát adtunk egy véges szabadságfokú rendszer esetén. A bemutatott példa egy általánosabb problematika alapfeladatát mutatja. Ez az instabil helyzetek visszacsatolt szabályozással való stabilizálása, ami széleskörben jelentkezik a dinamika mérnöki alkalmazásaiban.

Inkurzív hatás felismerhető kontinuumok dinamikájában is akkor, amikor numerikus vizsgálatot végezve diszkrét időlépéseket kell bevezetni. A legegyszerűbb anyagtörvények anticipatív algoritmusra vezetnek a megoldás során, és ez komoly gondot okoz a rendszer, de akár a numerikus módszer stabilitásában. Sőt, mivel sok esetben e kettő nem könnyen különíthető el, nagyon bizonytalanná teszi a stabilitásvizsgálatok eredményeit.

Arra a következtetésre jutottunk, hogy az anyagtörvényt célszerű anticipatív - inkurzív szempontból is megvizsgálni. A kutatás során célszerűvé vált egy új fogalom, az aszimptotikus anticipáció bevezetése. Ez az általunk javasolt új definíció hasznos eleme lehet a dinamikus folyamatokra vonatkozó vizsgálatokban alkalmazott anyagtörvények meghatározásának.

Az anyagtörvények anticipatív tulajdonságait vizsgálva megfigyeltük, hogy a fémes anyagok (elsősorban alumínium ötvözetek) nagy alakváltozása során megfigyelt dinamikus instabilitási jelenség (Portevin - Le Chatelier hatás) éppen akkor lép fel, amikor az alakváltozás előrehaladtával az anyagtörvény inkurzívvá válik.

5 A jelentés elkészítésében felhasznált legfontosabb saját publikációk jegyzéke

Béda P.B.: On modeling of Portevin - Le Chatelier effect, Materials Science Forum 659, pp. 367-371, 2010

Béda P.B: Stability in Delayed and Anticipatory Systems of Applied Mechanics, CASYS 2011 Abstract Book, Ed. DM Dubois, CHAOS asbl, Liege, 2012 (ISBN 2-930396-14-8) S9. p9.

Béda P.B.: Stability and discretisation in delayed and anticipatory systems of applied mechanics, ANZIAM JOURNAL 53: pp. C340-C353, 2012

Béda P.B.: Generic Bifurcation and Anticipatory Constitutive Equations in Mechanics of Continua, Proc. of the 4th Canadian Conference on Nonlinear Solid Mechanics, Montreal, Kanada, Paper 797., 2013

Béda P.B.: On the Role of Phenomenology and Dislocations in Modelling of Portevin-Le Chatelier Effect, Materials Science Forum 729, 138-143, 2013

Béda P.B.: Delay and anticipatory effects in finite and infinite degrees of freedom, Proc. of ENOC 2014 Vienna, 2014

Béda Gy. Béda P.B.: Mechanical modeling of granular materials, Materials Science Forum (megjelenés alatt), 2014

Béda P.B.: Dynamical systems and incursive effects in continuum mechanics, International Journal of Dynamics and Control (megjelenés alatt), 2014