# Kombinatorikus merevség és alkalmazásai - a K81472 számú OTKA pályázat zárójelentése (2010-2015)

**Témavezető: Jordán Tibor (ELTE Matematikai Intézet)**

## 1 Bevezetés

Rúdszerkezetek statikai tulajdonságainak matematikai eszközökkel történő vizsgálata Maxwell (1864) és Henneberg (1911) korai eredményei óta fontos terület. Az elmúlt másfél évtizedben a szerkezetek merevségének vizsgálata új lendületet kapott, köszönhetően annak, hogy egyrészt egészen más területeken (molekulák szerkezetének vizsgálatában, szenzorhálózatok lokalizációs problémáiban, CAD feladatokban, stb.) is hasznosnak bizonyultak a merevséggel kapcsolatos elméleti eredmények, másrészt néhány több évtizede nyitott sejtést sikerült igazolni vagy megcáfolni.

Az előző években, így a 2010-2015 közötti időszakban is, elsősorban az ú.n. kombinatorikus merevség területén folytattam kutatásokat. A kombinatorikus merevség a merevség elméletének azon részére utal, amelyben a szerkezetekhez kapcsolódó kombinatorikus struktúrák (gráfok, matroidok) kulcsszerepet játszanak.

A következőkben - az alapfogalmak definiálása után - összefoglalom az egyszemélyes K81472 számú OTKA pályázat támogatásával elért eredményeimet.

### 1.1 Alapfogalmak

A merevség elméletében a legtöbbet vizsgált objektum a rúd-csukló szerkezet (bar-and-joint framework), röviden a szerkezet (framework). Egy ($d$-dimenziós) *szerkezet* egy $(G, p)$ pár, ahol $G = (V, E)$ egy gráf, $p : V \to \mathbf{R}^d$ egy leképezés. Egy $uv$ él hossza $(G, p)$-ben a $p(u)$ és $p(v)$ Euklideszi távolsága. Egy szerkezetre gondolhatunk úgy, mint merev (rögzített hosszúságú) rudak együttesére, melyek pontszerű csuklók mentén illeszkednek - melyek a gráf éleinek és pontjainak felelnek meg. A rudak szabadon elforgathatók a csuklók mentén, a hosszuk azonban nem változhat.

A szerkezet *globálisan merev* (avagy *egyértelműen realizált*) $\mathbf{R}^d$-ben, ha $(G, p)$-t kongruencia erejéig egyértelműen meghatározzák az élek hosszai, azaz minden olyan $d$-dimenziós $(G, q)$ szerkezet a $G$ gráfon, amelyben az élek hosszai ugyanazok, mint $(G, p)$-ben, az kongruens $(G, p)$-vel. Ha ez a $G$ gráf minden $d'$-dimenziós $(G, q)$ realizációjára is igaz, ahol $d' \geq d$, akkor $(G, p)$-t *univerzálisan globálisan merevnek* mondjuk.

A szerkezet *merev* $\mathbf{R}^d$-ben, ha egyértelműen realizált egy kis környezeten belül, azaz ha van olyan $\epsilon > 0$, hogy minden olyan $d$-dimenziós $(G, q)$ szerkezet $G$-n, amelyben az élek hosszai ugyanazok, mint $(G, p)$-ben, és amelyre $p(v)$ és $q(v)$ távolsága $\epsilon$-nál kisebb minden $v \in V(G)$-re, az kongruens $(G, p)$-vel. Megmutatható, hogy $(G, p)$ pontosan akkor merev, ha csak olyan folytonos mozgatása lehetséges az élhosszak megtartásával, amely a tér merev mozgásainak (pl. eltolás, elforgatás) megszorításaként áll elő.

A $(G, p)$ szerkezet *generikus*, ha a pontjai koordinátáinak halmaza algebrailag független a racionális test felett. Egy $G$ gráf *globálisan merev* (ill. *merev*) $\mathbf{R}^d$-ben, ha valamely generikus $(G, p)$ szerkezet $G$-n globálisan merev (ill. merev) $\mathbf{R}^d$-ben. Ismert, hogy generikus szerkezetekre a globális merevség és a merevség is csak a $G$ gráftól függ, azaz pontosan akkor létezik egy $(G, p)$ globálisan merev (ill. merev) generikus szerkezet $G$-hez, ha minden $(G, p)$ generikus szerkezet globálisan merev (ill. merev). További fontos eredmény az, hogy generikus szerkezetek esetén a merevség ekvivalens az ú.n. *infinitezimális merevséggel*. Ez utóbbi tulajdonság, amely minden esetben erősebb a merevségnél, akkor teljesül, ha egy, a szerkezethez tartozó mátrix (a *merevségi mátrix*) rangja maximális, azaz eléri a generikus rangot. Ezen mátrix segítségével definiálható egy $G$ gráfhoz a ($d$ dimenziós) *merevségi matroidja*, melynek alaphalmaza a $G$ élhalmaza. Megjegyezzük, hogy az univerzális merevség nem generikus tulajdonság, már az egydimenziós esetben sem.

A szerkezetek jól használhatók olyan struktúrák merevségének vagy rugalmasságának modellezésére, amelyekben bizonyos alkotórészek távolsága nem változhat, míg más részek esetleg elmozdulhatnak egymáshoz képest. Ez az alkalmazások széles skálájához vezet a mérnöki tudományokban [24], a molekuláris biológiában [29], szenzor hálózatokban [1], CAD feladatokban [23], mozgatható antennák esetén [25], autonom formációkban [3] és a diszkrét geometria egyéb területein.

# 2 Merev gráfok és szerkezetek

Lovász és Yemini [22] sejtése azt mondja, hogy ha egy $G$ gráf pont-összefüggőségi száma kellően magas, akkor $G$ generikusan merev a térben. Igazoltuk a sejtést négyzetgráfokra (avagy molekuláris gráfokra) : ezekre a 7-összefüggőség elég, és ez éles [13].

Igazoltuk, hogy kellően magas összefüggőségi szám esetén (illetve, amennyiben a merevségi matroid vertikális összefüggősége kellően nagy) a gráf 2-dimenziós merevségi matroidja egyértelműen meghatározza a gráfot [16]. Ez Whitney körmatroidra (avagy egydimenziós merevségi matroidra) vonatkozó klasszikus eredményének megfelelője a kétdimenziós esetben. Az eredményünk Servatius egy általánosabb sejtését igazolja a síkban.

Megvizsgáltuk, hogyan változnak a rúderők egy terhelt szerkezetben, ha egy terheletlen pontjának helyzete kicsit megváltozik. Kimutattuk, hogy generikus esetben azon rudak halmaza, amelyekben az erő változik, csak a gráftól függ. Jellemzésünk minden $d$ dimenzióra érvényes és a merevségi matroidot használja. Ezen alapulva hatékony algoritmust adtunk ezen zóna megtalálására a $d = 2$ esetben [15].

Magasabb dimenziós merevségi kérdések motiválták annak vizsgálatát, hogy mely gráfoknak van olyan infinitezimálisan merev realizációja a síkban, melyben két adott pont (csukló) helye egybeesik. Erre pontos jellemzést adtunk, melynek nyomán újfajta matroidokat definiáltunk és megcáfoltuk Watson egy sejtését [4].

Az utóbbi pár évben sokan vizsgálták a bizonyos szimmetriával rendelkező (de ettől eltekintve kellően általános helyzetű) rúdszerkezetek merevségi tulajdonságait. A kutatások egyik iránya olyan mozgásokat enged meg, amelyek megőrzik az adott szimmetriát. Ebben a modellben kombinatorikus jellemzést adtunk a merevségre abban az esetben, amikor a szimmetria csoport páratlan rendű diéder csoport [18].

*Tensegrity szerkezetek* esetén a fix hosszúságú rudak helyett kötelek és rugók kötik össze a csuklókat, melyek felső és alsó korlátokat határoznak meg a távolságukra. Ezek gráfjai ennek megfelelően élcímkézett gráfok. Jellemeztük azon (minimális élszámú) tensegrity gráfokat, amelyeknek bármely síkbeli konvex ú.n. tensegrity poligon realizációja infinitezimálisan merev, avagy, ami ezzel itt ekvivalens, rendelkezik seholsem nulla önfeszültséggel [5]. Ez megválaszolja Roth és Whiteley, illetve Connelly korábbi kérdéseit.

Megmutattuk, hogy annak az eldöntése, hogy egy adott tensegrity gráfnak minden generikus egydimenziós realizációja infinitezimálisan merev-e, NP-nehéz [7].

A rúdszerkezetekre (ill. azok gráfjaira) vonatkozó merevségi eredmények mintájára hipergráfok merevségére vonatkozó kombinatorikus eredményeket igazoltunk egy- és kétdimenzióban. Amennyiben nem pontpárok távolságaira vonatkozó feltételek adottak (azaz fix hosszúságú rudak), hanem nagyobb ponthalmazokra vonatkozó affin vagy projekív feltételek, akkor természetes módon definiálhatók hipergráfok, ill. az azokon értelmezett affin vagy projektív szerkezetek merevségi tulajdonságai. Többek között megmutattuk, hogy az egydimenzióban generikusan projektívan merev négy-uniform hipergráfok jellemezhetők egy ritkasági feltétellel (és ezáltal hatékonyan tesztelhetők), igazolva ezzel George és Ahmed sejtését [17].

# 3 Globálisan merev gráfok és szerkezetek

Egy pontpárt akkor nevezünk *globálisan linkeltnek* egy $d$-dimenziós szerkezetben, ha minden, ugyanolyan élhosszakkal rendelkező realizációban a távolságuk ugyanannyi. A $G$ gráfban az $u, v$ pontpár akkor globálisan linkelt, ha $u$ és $v$ a $G$ minden generikus realizációjában globálisan linkelt. Ezen párok pontos jellemzése még $d = 2$-re is megoldatlan. Többek között megmutattuk, hogy a síkban minimálisan merev $G$ gráfban pontosan akkor globálisan linkelt egy pontpár, ha van köztük él [8]. Ez egy korábbi sejtésünkre ad pozitív választ. Az új bizonyítási módszerek egy szabadsági fokú szerkezetek folytonos mozgásainak vizsgálatára is támaszkodnak. Egy ezzel kapcsolatos sejtésre adtunk ellenpéldát [9]-ben.

A $d$-dimenzióban ($d \geq 3$) globálisan merev gráfok jellemzése a terület egyik legfontosabb nyitott kérdése. Ezt a kérdést két, a merevségi vizsgálatokban fontos szerepet játszó gráfosztályra sikerült teljes körűen megválaszolni:

A $d$-dimenziós térben teljes dimenziós merev testekből és az őket összekötő néhány diszjunkt rúdból álló rendszert *$d$-dimenziós test-rúd szerkezetnek* nevezzük. Kombinatorikus jellemzést (és ennek nyomán hatékony algoritmust) adtunk a generikusan globálisan merev test-rúd gráfokra, minden $d$ dimenzióra [2]. Megmutattuk, hogy pontosan akkor globálisan merev egy ilyen gráf, ha redundánsan merev. Azt is igazoltuk, hogy minden globálisan merev test-rúd gráfnak van univerzálisan merev generikus $d$-dimenziós realizációja. Ezzel Gortler śs Thurston egy sejtésére adtunk részleges választ.

A $d$-dimenziós térben kettő ko-dimenziós affin alterek (ú.n. zsanérok) mentén illeszkedő teljes dimenziós merev testekből álló rendszert *$d$-dimenziós test-zsanér szerkezetnek* nevezzük. Jellemeztük a globális merevséget test-zsanér gráfokra is, minden $d$ dimenzióra [19]. A jellemzés szintén kombinatorikus és algoritmikus. Érdekes módon az eredmény elvezetett test-zsanér gráfok olyan végtelen családjához minden $d \geq 3$-ra, amelyek redundánsan merevek, $(d+1)$-összefüggők, de nem globálisan merevek, így ellenpéldák Hendrickson egy sokat vizsgált sejtésére. A térben eddig csak egyetlen ellenpélda gráf volt ismert. Ezzel a gráf konstrukcióval több sejtést sikerült megcáfolnunk.

Servatius egy kérdése nyomán egyszerűbb jellemzést adtunk a kétdimenzióban globálisan merev zeolitokra [12]. Ezek speciális szerkezetű gráfok, melyek a zeolit molekulák struktúráját modellezik.

Az *irány-hossz szerkezetekben* bizonyos pontpárok távolsága, míg más pontpárok által meghatározott egyenesek iránya rögzített. Ebben az általánosabb modellben is a generikusan globálisan merev szerkezetek jellemzésének egyik lényeges lépése egy induktív konstrukció, amely Henneberg klasszikus eredményéhez hasonló előállítást ad ezen gráfosztályra. Ezen konstrukció lépéseit definiáltuk és igazoltuk, hogy valóban megőrzik a globális merevséget [6].

Pontos jellemzését adtuk az egydimenziós univerzálisan globálisan merev teljes páros gráf struktúrájú szerkezeteknek [20]. A jellemzés egyik következménye az, hogy nem létezik univerzálisan globálisan merev páros gráf (a $K_2$ gráfon kívül) semmilyen dimenzióban sem. A teljes páros gráfokra vonatkozó tételünket nemrég Connelly és Gortler fejlesztette tovább, minden dimenzióra.

# 4 Mátrix kiegészítés

A kutatási időszak második felében bekapcsolódtam az ú.n. skalár szorzat merevséggel kapcsolatos kutatásokba, amelyek a Gram mátrix kiegészítési feladathoz kötődnek. A mátrix kiegészítési feladatban egy részlegesen kitöltött $n$-szer $n$-es mátrix hiányzó elemeit kell meghatározni úgy, hogy a kapott mátrix teljesítsen bizonyos feltételeket. Egy sokat vizsgált és számos alkalmazásban előforduló eset az, amelyben a cél egy legfeljebb $d$ rangú Gram mátrixot előállítani. A Gram mátrix szorzatkénti felírásában szereplő vektorok pontoknak, az ismert mátrixelemek - avagy ismert skalár szorzatok - egy $n$ pontú (esetleg hurokélt is tartalmazó) gráf éleinek feleltethetők meg. Természetes kérdés, hogy a kiegészítés, ha létezik, mikor egyértelmű (triviális transzformációk erejéig), valamint ez hogyan függ a gráftól.

Kellően általános helyzetű koordinátákat feltételezve az egyértelműség (lokálisan) csak a gráftól függ. Az egyértelműséget biztosító gráfok jellemzése nyitott kérdés $d = 2$-re is. A kombinatorikus merevség elméletében hasznosnak bizonyult eszközök továbbfejlesztésével a Gram mátrix kiegészítési feladatokra új, kombinatorikus jellegű eredményeket nyertünk. Kimutattuk, hogy bizonyos egyszerű lokális műveletek megőrzik a gráf lokális ill. globális egyértelműségét. Ezen eredmények és további új megfigyelések révén számos új esetben jellemezni tudtuk a lokális egyértelműséget [10].

Megmutattuk, hogy a globális egyértelműség nem generikus tulajdonság $d \geq 2$-re. Egy gráfot akkor nevezünk *globálisan egyértelműen kiegészíthetőnek*, ha a megfelelő szerkezetű mátrix, generikus esetben, mindig egyértelműen egészíthető ki. Új elégséges feltételeket mutattunk erre a tulajdonságra [10, 11], igazolva többek között Singer és Cucuringu egyik sejtését.

# 5 Egyéb tudományos tevékenység

A kutatási időszakban több nemzetközi konferencián voltam meghívott előadó: Kyoto, Japán (2012), Bristol, Nagy-Britannia (2013), Fields Institute, Toronto, Kanada (2014), Fukuoka, Japán (2015), Nyborg, Dánia (2015).

A projekt témájában több nemzetközi konferenciának és workshopnak voltam társszervezője: *Workshop on rigidity*, Thematic Program on Discrete Geometry and Applications, Fields Institute, Toronto, Kanada (2011), *Rigidity theory: progress, applications, and key open problems*, Banff, Kanada (2012), *Advances in combinatorial and geometric rigidity*, Banff, Kanada (2015), Rigidity, submodularity, and discrete convexity, Bonn, Németország (2015).

Mindezek mellett előadás-sorozatot tartottam a RIMS kutatóintézetben *Combinatorial rigidity: graphs and matroids in the theory of rigid frameworks* címmel (Kyoto, Japán, 2012), valamint az ELTE nemzetközi nyári iskoláin is (Budapest, 2013, 2014).

A Japán Matematikai Társulat felkért egy nagyobb lélegzetű összefoglaló, áttekintő munka megírására a témakör gráf- és matroidelméleti mószereiről. Ez a közel 90 oldalas munka hamarosan megjelenik [14].

# References

[1] J. Aspnes, T. Eren, D.K. Goldenberg, A.S. Morse, W. Whiteley, Y. Yang, B.D.O. Anderson, P.N. Belhumeur, A Theory of Network Localization, IEEE Transactions on Mobile Computing, Vol 5, Issue 12, pp. 1663-1678, 2006.

[2] R. Connelly, T. Jordán, W. Whiteley, Generic global rigidity of body-bar frameworks, *J. Combinatorial Theory, Ser. B.*, Vol. 103, Issue 6, November 2013, pp. 689-705.

[3] T. Eren, B.D.O. Anderson, A.S. Morse, W. Whiteley, P.N. Belhumeur, Operations on rigid formations of autonomous agents, *Commun. Inf. Syst.*, Volume 3, Number 4 (2003), 223-258.

[4] Z. Fekete, T. Jordán, V.E. Kaszanitzky, Rigid realizations of graphs with two coincident points, *Graphs and Combinatorics*, May 2015, Volume 31, Issue 3, pp 585-599.

[5] J. Geleji, T. Jordán, Robust tensegrity polygons, *Discrete and Computational Geometry* 50: 537-551 (2013).

[6] B. Jackson, T. Jordán, Operations preserving global rigidity of generic direction-length frameworks, *International Journal on Computational Geometry and Applications*, Volume 20, Number 6, December 2010, pp. 685-706.

[7] B. Jackson, T. Jordán, C. Király, Strongly rigid tensegrity frameworks on the line, *Discrete Applied Mathematics*, Volume 161, Issues 78, May 2013, pp. 1147–1149.

[8] B. Jackson, T. Jordán, Z. Szabadka, Globally linked pairs of vertices in rigid frameworks, in: Rigidity and Symmetry (R. Connelly, W. Whiteley and A. Ivic Weiss, eds.), *Fields Institute Communications*, 70, pp. 177-203 (2014).

[9] B. Jackson, T. Jordán, B. Servatius, H. Servatius, Henneberg moves on mechanisms, *Beitr. Algebra Geom*, 56 (2), pp. 587-591, 2015.

[10] B. Jackson, T. Jordán, S. Tanigawa, Combinatorial conditions for the unique completability of low rank matrices, *SIAM J. Discrete Math.* 28-4 (2014), pp. 1797-1819.

[11] B. Jackson, T. Jordán, S. Tanigawa, Unique low rank completability of partially filled matrices, közlésre benyújtva.

[12] T. Jordán, Generically globally rigid zeolites in the plane, *Information Proc. Letters*, Vol. 110, Issues 18-19, 2010, Pages 841-844.

[13] T. Jordán, Highly connected molecular graphs are rigid in three dimensions, *Information Proc. Letters*, Vol. 112, 2012, pp. 356-359.

[14] T. Jordán, Combinatorial rigidity: graphs and matroids in the theory of rigid frameworks, *MSJ Memoirs*, megjelenés alatt.

[15] T. Jordán, G. Domokos, K. Tóth, Geometric sensitivity of rigid graphs, *SIAM J. Discrete Math.*, vol. 27, No. 4, pp. 1710-1726, 2013.

[16] T. Jordán, V.E. Kaszanitzky, Highly connected rigidity matroids have unique underlying graphs, *European J. Combinatorics*, Volume 34, Issue 2, February 2013, pp. 240–247.

[17] T. Jordán, V.E. Kaszanitzky, Sparse hypergraphs with applications in combinatorial rigidity, *Discrete Appl. Math.*, Vol. 185 (2015) pp. 93-101.

[18] T. Jordán, V.E. Kaszanitzky, S. Tanigawa, Gain-sparsity and symmetry-forced rigidity in the plane, Egerváry Research Group, Budapest, TR-2012-17, közlésre benyújtva.

[19] T. Jordán, C. Király, S. Tanigawa, Generic global rigidity of body-hinge frameworks, Egerváry Research Group, Budapest, TR-2014-06, közlésre benyújtva.

[20] T. Jordán, V-H. Nguyen, On universally rigid frameworks on the line, *Contributions to Discrete Mathematics*, megjelenés alatt.

[21] G. Laman, On graphs and rigidity of plane skeletal structures, *J. Engineering Math.* 4 (1970), 331-340.

[22] L. Lovász and Y. Yemini, On generic rigidity in the plane, *SIAM J. Algebraic Discrete Methods* 3 (1982), no. 1, 91–98.

[23] B. Servatius and W. Whiteley, Constraining plane configurations in CAD: Combinatorics of directions and lengths, *SIAM J. Discrete Math.*, 12, (1999) 136–153.

[24] B. Servatius, O. Shai, and W. Whiteley, Combinatorial characterization of the Assur graphs from engineering, *Europ. J. Comb.*, to appear.

[25] C. Sultan, R. Skelton, Deployment of tensegrity structures, *International Journal of Solids and Structures*, Volume 40, Issue 18, September 2003, pp. 4637-4657.

[26] T.S. Tay and W. Whiteley, Recent advances in the generic rigidity of structures, *Structural Topology* 9 (1984), 31-38.

[27] M.F. Thorpe and P.M. Duxbury, eds, Rigidity theory and applications, Kluwer 1999.

[28] W. Whiteley, Some matroids from discrete applied geometry. In *Matroid theory (J. E. Bonin, J. G. Oxley and B. Servatius, eds.)*, Contemp. Math., 197, 171–311, American Mathematical Society, 1996.

[29] W. Whiteley, Rigidity of molecular structures: geometric and generic analysis, in: Rigidity theory and applications (Edited by M.F. Thorpe and P.M. Duxbury), Kluwer 1999, pp. 21-46.