

Részletes szakmai zárójelentés az OTKA 81403 számú, „Parciális differenciálegyenletek, komplex hálózatok és alkalmazásaik” című projektjéről

Kutatásainkat a 2010-04-01 - 2015-06-30 időszakban a kutatási terv szerint az alábbi területeken végeztük.

Hálózati folyamatokat leíró differenciálegyenletek.
Parciális funkcionál differenciálegyenletek.
Differenciálegyenletek elméleti vizsgálata.
Parciális differenciálegyenletek numerikus vizsgálata.
Celluláris neurális hálózatok.

Az alábbiakban a kutatási eredményeket ezen témakörök szerint ismertetjük.

Hálózati folyamatokat leíró differenciálegyenletek

Egy N csúcsú gráf esetében az SIS típusú járványterjedést a hálózaton leíró egyenletek száma N -nek exponenciális függvénye, ezért a feladat numerikusan közvetlenül nem kezelhető. Az [SP1] dolgozatban megmutattuk, hogy a gráf automorfizmuscsoportjának ismeretében az egyenletrendszer mérete jelentősen csökkenthető (akár N lineáris függvénye is lehet, ha a gráfnak sok automorfizmusa van). Az [SP6] dolgozatban az általános rendszerből levezettük a különböző típusú csúcsok és élek számának várható értékére vonatkozó, úgynevezett „pairwise” differenciálegyenleteket, melyeket azelőtt heurisztikus megfontolások alapján származtattak. A dolgozatban vizsgáltuk azt is, hogy a hármasok lezárására alkalmazott közelítések különböző gráfokon mennyire megbízhatóak.

Amennyiben a gráf pontos szerkezete nem ismert (ez áll fenn általában valós modellek esetén), akkor a gráf struktúráját valamennyiben magában foglaló, mégis jelentős egyszerűsítéseket tartalmazó modelleket célszerű bevezetni. Ezen modellek esetében az egyszerű járványterjedésnél összetettebb folyamatok is vizsgálhatók. Az [SP2] és [SP3] dolgozatban egy olyan modellt vizsgáltunk, amelyben a betegségen kívül a betegséggel kapcsolatos információ is terjed a gráfon. Ebben a modellben sikerült az információ és betegségterjedés kapcsolatáról biológiailag is releváns elméleti eredményeket igazolni, és ezekkel a szimulációból kapott eredményeket alátámasztani.

A hálózati folyamatot leíró Markov-lánc alapegyenlete sok esetben egy tridiagonális mátrixszal meghatározott lineáris differenciálegyenlettel adható meg. Amennyiben a hálózat csúcsainak száma végtelenhez tart, akkor ebből a folyamat várható értékére egy nem-lineáris, közelítő differenciálegyenlet vezethető le formálisan. A határátmenet egzakt bizonyítását, különböző esetekre az [SP4] és [SP18] cikk tartalmazza. Ebben az operátorfélcsoportok elméletének segítségével a közelítés pontosságára vonatkozó eredményeket is igazoltunk, valamint bebizonyítottuk, hogy a Markov-lánccok eddigieknél szélesebb osztályára, az úgynevezett aszimptotikusan sűrűségfüggő folyamatokra is fennáll a közelítés.

Az adaptív hálózatokkal kapcsolatos munkánk, [SP9] keretében olyan folyamatokat tanulmányoztunk, amelyeknél az élek létrehozása és megszüntetése a csúcsok állapotától függ. Ez a járványterjedés esetében például azzal motiválható, hogy a fertőzöttekkel a többi csúcs igyekszik megszüntetni a kapcsolatát, és ezzel egyidejűleg új kapcsolatokat hoz létre. Az előző vizsgálatainkhoz hasonlóan a csúcsok kétféle állapotban lehetnek, fertőzött (I) és egészséges (S). Így háromféle él fordulhat elő a gráfban SS, SI és II típusú. Ezek létrehozására és megszüntetésére három-három rátát adtunk meg, és felírtunk egy öt-változós differenciálegyenlet rendszert az S és I típusú csúcsok, valamint a háromféle él számának megváltozására. A rendszerben megjelenő bifurkációk elméleti vizsgálatát az [SP5] dolgozatban közöltük. Háromféle bifurkációt találtunk a rendszerben. Az első a fertőzés nélküli egyensúlyban megjelenő transzkritikus bifurkáció, melynek során a triviális egyensúly elveszíti stabilitását, és egy ún. endemikus egyensúly jelenik meg. A

második bifurkáció nyereg-csomó típusú, ennek során két endemikus egyensúly jöhet létre. Végül az egyik endemikus egyensúlyban Hopf-bifurkáció következhet be, amely szuperkritikus típusúnak bizonyul, mivel stabil határciklushoz vezet.

Az [SP7] dolgozatban levezettünk egy olyan lezárást is, amely pontosabb közelítést ad az eddigieknél speciális gráf struktúra esetén. Az új lezárás levezetése azon alapul, hogy a fertőző csúcsok száma valamilyen speciális eloszlást mutat. Ennek segítségével a momentumokra levezethető differenciálegyenletek. A legegyszerűbb esetben a harmadik momentum kifejezhető az első kettővel, melynek segítségével az első két momentumra egy zárt differenciálegyenlet-rendszert kapunk. Az [SP8] dolgozatban egy végtelen sok egyenletről álló rendszert vezettünk le, melyből különböző momentum lezárásokkal képezett közelítések pontossága becsülhető.

Az [SP10] dolgozatban azt vizsgáltuk, hogy körgráf esetén az alacsony dimenziós nemlineáris közelítő differenciálegyenletek milyen pontossággal írják le a rendszer viselkedését. Három különböző közelítést hasonlítottunk össze a Monte-Carlo szimuláció eredményével. Az első közelítés olyan alapegyenlet (master equation) felírásán alapul, amely a gráfban a fertőző élek számára tartalmaz becslést. A második közelítés alapvetően kihasználja a gráf geometriai szerkezetét, és a fertőzés terjedését egy front mozgásával írja le. A harmadik közelítés pedig Sharkey részrendszer (subsystem approach) módszerét adaptálja körgráf esetére.

Az [SP11] dolgozatban egy neuron hálózatban az aktivitás terjedését vizsgáljuk, amely matematikai szempontból hasonlít a fertőzés terjedésének vizsgálatához. Ilyen hálózatok esetében a neuronok tüzelése (aktivitás növekedése) lavinaszerűen történik, azaz egy neuron tüzelését a hálózaton keresztül számos más neuron tüzelése követi, majd a folyamat nyugvópontra tér a következő lavina kezdetéig. A dolgozat matematikai eredménye a lavinák mérete eloszlásának kiszámítása, melyről megmutattuk, hogy az eddigi általános vélekedéssel ellentétben nem hatványeloszlást követ.

Az [SP14] dolgozatban olyan differenciálegyenlet-rendszert vezetünk be SIS típusú járványterjedés leírására, amelyben a változók száma a hálózat csúcsainak számával egyezik meg, és a gráf szerkezete az egyenlet együtthatóiban kódolható. A modell által adott eredmény különféle, konfigurációs modellel generált hálózat esetén jó egyezést ad a numerikus szimulációkkal. A [SP15] cikkben körgráfból származó, speciális struktúrájú hálózatokon terjedő járványterjedés modelljét dolgoztuk ki.

Az [SP16] és [SP17] dolgozatokban SIR típusú járványterjedés egzakt leírását adjuk. Bebizonyítottuk, hogy a hármasok lezárására használt közelítő képlet körmentes gráfokon egzakt. Ezt a megközelítést kiterjesztettük kevés kört tartalmazó gráfokra is, olyan módon, hogy a körök által meghatározott bizonyos részgráfokra is felírunk differenciálegyenleteket.

Hálózati folyamatok szabályozása témakörében a Dynamic Matrix Control nevű irányítás-elméleti eljárást vizsgáltuk. Az [SP20] dolgozatban először a módszer aszimptotikus stabilitásával foglalkoztunk. Megmutattuk, hogy ha a rendszert egy stabil lineáris differenciálegyenlet írja le, akkor a módszer a kívánt értékre állítja be a célfüggvényt. Fertőzésterjedés szabályozását is vizsgáltuk a gráf éleinek elvágásával, illetve új élek létrehozásával. Numerikus közelítésekkel megmutattuk az [SP19] dolgozatban, hogy az ún. modell prediktív kontroll alkalmazásával ilyen módon a betegség terjedése megállítható úgy, hogy közben a gráf átlagos fokszáma nem csökken. Hálózati folyamatok kontrollálhatóságát is vizsgáltuk. Az [SE] cikkben absztrakt peremkontroll-problémákat vizsgálunk félcsoporthelméleti megközelítésben. Karakterizáltuk a kontroll során approximatív elérhető állapotok terét, valamint bevezettünk egy „maximális elérhetőségi alteret”. Absztrakt eredményeinket az egy-csúcsban-kontrollált hálózati folyamatra alkalmaztuk.

Parciális funkcionál differenciálegyenletek

A parciális differenciálegyenletek elméletének témakörében (nem lokális tagokat, pl. az ismeretlen függvény integrálját) tartalmazó időfüggő nemlineáris parciális funkcionál differenciálegyenleteket

és rendszereket vizsgáltunk. Az egyes esetekben bebizonyítottuk globális megoldás létezését véges időintervallumon és a $(0, \infty)$ intervallumon, továbbá kiegészítő feltételek mellett igazoltuk a megoldások korlátosságát, illetve stabilizációját, ha az idő végtelenhez tart.

Először különböző típusú parciális funkcionál differenciálegyenletekből álló rendszereket vizsgáltunk, amelyek az alkalmazások során fellépnek. A [BA1] és [BA2] cikkekben a Schauder-féle fixponttétel segítségével tanulmányoztuk a rendszereket. Ezáltal a gyenge megoldás létezésére vonatkozó korábbi eredményt sikerült kiterjeszteni olyan rendszerekre, amelyekben a főrés is tartalmazhat nem lokális függést (pl. az ismeretlen függvény idő vagy térintegrálját).

Az [SL1] dolgozatban egy nemlineáris parabolikus és egy egyváltozós funkcionál-differenciálegyenletből álló rendszert tanulmányoztunk. Ilyen alakú, degenerált rendszer lép fel pl. viszkoelasztikus polimerekben lejátszódó diffúzió során. Igazoltuk a megoldások létezését a monoton típusú operátorok elméletének felhasználásával. Az [SL2] dolgozatban egy olyan nemlineáris parabolikus funkcionál egyenletet tanulmányoztunk, amely állapotfüggő késleltetést tartalmaz. Az utóbbi időben több szerző foglalkozott állapotfüggő késleltetést tartalmazó differenciálegyenlettel az egyváltozós esetben, mivel az ilyen egyenletek is fontos szerepet játszanak a természettudományos alkalmazásokban. Alkalmos feltételek teljesülése esetén itt is felhasználható a monoton típusú operátorok elmélete. Így bizonyítottuk a megoldások létezését, továbbá néhány kvalitatív tulajdonságát.

Az [SL3] cikkben egy nem egyenletesen parabolikus kvázilineáris funkcionál egyenletből és egy elsőrendű egyváltozós funkcionál differenciálegyenletből álló rendszer gyenge megoldásainak létezését igazoltuk a monoton típusú operátorok és a Schauder-féle fixpont tétel felhasználásával. Ilyen rendszerek lépnek fel pl. változó porozitású anyagokban lejátszódó diffúziós és transzport folyamatok során, ha a nyomást állandónak tételezzük fel.

Elsőrendű nemlineáris evolúciós funkcionál egyenletek vizsgálata után az [SL4] cikkben olyan másodrendű nemlineáris evolúciós funkcionál egyenleteket tanulmányoztunk, amelyek állapotfüggő késleltetést tartalmaznak. Alkalmos feltételek teljesülése esetén bizonyítottuk a megoldások létezését, továbbá azok korlátosságát pozitív t (idő) esetén és stabilizációját, amennyiben t végtelenhez tart.

Ezután az [SL5], [SL6] dolgozatokban olyan szemilineáris hiperbolikus funkcionál egyenleteket, illetve rendszereket tanulmányoztunk, amelyekben egyes tagok az ismeretlen függvény tetszőlegesen magas hatványát tartalmazhatják. Igazoltuk a globális megoldás létezését tetszőleges véges időintervallumon és a nemnegatív félegyenesen, majd kiegészítő feltételek mellett bizonyítottuk a megoldás egyértelműségét, továbbá az idő szerinti derivált korlátosságát, illetve exponenciális lecsengését, valamint azt, hogy a megoldás exponenciális gyorsasággal stabilizálódik a végtelenben. Az [SL7] cikkben pedig állapotfüggő késleltetést tartalmazó szemilineáris hiperbolikus funkcionál differenciálegyenleteket tanulmányoztunk.

Differenciálegyenletek elméleti vizsgálata

Az [SP12] dolgozatban egy három-változós közönséges differenciálegyenlet-rendszer bifurkációit vizsgáltuk, amely platina felületen zajló oxigén redukció mechanizmusát modellezi. A reakció részletes vizsgálatát az üzemanyag cellák modellezése teszi fontossá. A dolgozatban megmutattuk, hogy a dinamikai rendszerben transzkritikus és nyereg-csomó bifurkáció jelenhet meg. Ez utóbbi bistabilitáshoz vezet, amely kémiai szempontból is fontos eredmény. Az [SP13] dolgozat utazó hullámok stabilitásának vizsgálatával foglalkozik. A modell az égésmélethez származik és lángterjedést ír le szilárd közegben. A dolgozatban az Evans-függvény módszer segítségével igazoljuk, hogy bizonyos utazóhullám megoldások stabilak. A Evans-féle feltétel ellenőrzésére új numerikus eljárást alkalmaztunk.

Az [SE1] dolgozatban ún. nem-autonóm evolúciós egyenletek megoldásának numerikus közelítését vizsgáljuk. Ezek olyan egyenletek, ahol a rendszer változását leíró operátor minden

időpillanatban más (vagyis a jobb oldalon $A(t)$ áll). Az ezen operátorokra tett megfelelő feltételek (pl. parabolikusság vagy hiperbolicitás) mellett az egyenlet megoldását egy ún. evolúciós család adja. Ezt az evolúciós családot definiálja a Magnus-féle végtelen sorösszeg. A cikkünkben egy, a sor első tagjára alkalmazott numerikus módszer segítségével közelítjük a megoldásokat. Sikerült igazolnunk, hogy például a Schrödinger egyenlet bizonyos típusaira (megfelelő potenciál és kezdeti feltétel mellett) a módszer normában konvergens. Általánosabb Schrödinger-operátor esetén pedig pontonkénti konvergenciát nyerünk.

A [KPS] cikkben a nemlineáris operátorfélcsoportoknak egy olyan osztályával, az ún. max-plus félcsoportokkal foglalkozunk, amelyek lehetőséget nyújtanak többek között a „conservation law”, a Hamilton-Jacobi egyenlet, valamint a Hamilton-Jacobi-Bellman egyenlet megoldásainak vizsgálatára.

A [GB1] és a [GB6] dolgozatok témája kaosz halmazértékű dinamikákban. A halmazértékű dinamika az El Nino időjárási jelenség Vallis-féle modelljének – amely a klasszikus Lorenz rendszer egy nemszimmetrikus változata – számítógéppel segített [GB1] bizonyításában csak másodlagosan, a számítógépes programban jelenik meg, és a kerekítési hibák fellépése miatti szükségszerűség. A [GB4] dolgozat a kaotikus rendszerek másik prototípusának számító Smale--patkó szokásos, nyeregpontra stabil-instabil sokaságainak transzverzális heteroklinikus pontjából kiinduló konstrukcióját ismétli meg, azzal a különbséggel, hogy maga a leképezés halmazértékű, egész pontosan az egyértékű leképezés konvex-kompakt, kicsiny perturbációja. Halmazértékű perturbációk és nyeregpontra egyszerűbb kapcsolatát a [GB7] dolgozat tárgyalja, a szokásos egyértékű szelekciókat parametrizált függvénycsaládokba rendező módon.

A [GB5] cikk az adócsalás egy konkáv, ágens-alapú hálózati modelljét vizsgálja: a matematikai eredmény a konszenzus-dinamikák egy elemi fixpont-tétele, amely globálisan stabil egyensúlyi állapotot garantál.

Parciális differenciálegyenletek numerikus vizsgálata

A maximum elv parabolikus feladatokra azt fejezi ki, hogy a folytonos esethez hasonlóan a megoldásfüggvény tartomány belsejében felvett értékeit a parabolikus peremen felvett értékekből, illetve a forrásfüggvény értékeiből becsülni tudjuk. Az [FI] dolgozatban megmutattuk, hogy a lineáris feladatokra a rácsháló megfelelő megválasztásával a diszkrét (numerikus) megoldásra átvihető ez az elv. Kétoldali (alsó és felső) becsléseket adtunk, és n -dimenziós téglatesten való prizmatikus felbontásra megadtuk az időbeli diszkrétizációs lépésközt. Numerikus kísérletekkel ellenőriztük az eredményeinket.

A módosított maximum elv azt fejezi ki, hogy a numerikus megoldás maximuma és minimuma a folytonos feladat maximum-minimum elvéből származó alsó illetve felső korlátjaival becsülhető. Az [FKSz] cikkben reakció-diffúzió egyenletre, és annak véges differenciás és véges elemes diszkrétizációjára mutattuk meg ezt a tulajdonságot. Numerikus kísérletekkel ellenőriztük az eredményeinket.

A [HT1] dolgozatban az elliptikus feladatokra vonatkozó maximumelveket vizsgáltuk. Megadtunk elégséges feltételeket ezek teljesülésére, és megmutattuk, hogy alkalmazásokban előforduló esetben ipari szoftverek is adnak olyan rácsokat, melyeken nem lehet kielégíteni a különféle maximumelvek mindegyikét.

Az [FKK] dolgozatban sikerült egy nemlineáris feladatosztályra is kiterjesztenünk a lineáris eredményeinket. A diszkrétizációs lépésközökre nyert korlátozó feltételek lényegében megegyeznek a lineáris feladatokra korábban nyert feltételekkel. Alkalmazásként megvizsgáltunk egy felületi reakció modellt, egy transzport problémát, illetve egy populáció-dinamikai modellt.

Mint ismeretes, az operátorszeleltetés módszere és a Richardson-féle extrapoláció alkalmazása jelentősen megnöveli a számítások hatékonyságát. A környezeti jelenségek leírására szolgáló

modellekben, amelyeknek részletes leírása megtalálható [FHZ1] könyvben, több önálló részlet is ezzel a témával foglalkozik, például, a kémiai reakciók numerikus modellezése, valamint a szeletelési eljárások vizsgálata a légszennyeződési folyamatokban, stb. Nagy méretű valós feladatokon teszteltük az eljárásokat. Az [FIS] dolgozatban szintén az operátorszeletelés módszere és a Richardson-féle extrapoláció kombinálását hajtottuk végre reakció-diffúziós egyenletek megoldására, ahol a nemlineáris részre explicit, a lineáris részre pedig implicit sémát alkalmaztunk. Az [FHZ2] cikkben a Richardson extrapoláció alkalmazását vizsgáltuk meg többdimenziós, advekciót tartalmazó feladatra. Az elméleti eredményeket az UNI-DEM modellen ellenőriztük, nagy teljesítményű, párhuzamos számítógépen. Egy általános környezeti (légszennyeződési) modell numerikus vizsgálatát a [FHZ3] dolgozatban tárgyaltuk.

Az implicit a posteriori hibabecslés előnye, hogy minden egyes résztartományon egy-egy különálló feladatot oldunk meg, így könnyen párhuzamosítható. Viszont eddig csak a hibára adott becslés és a pontos hiba normáinak ekvivalenciáját ismertük, a [HT2] cikkben viszont egy olyan implicit hibabecslőt mutatunk, melyben a kettő közti különbséget becsüljük. Ezáltal megmutatjuk, hogy mindez alkalmazható hp-adaptivitásra, ami a leggyorsabb konvergenciát képes biztosítani.

Celluláris neurális hálózatok

A [GB2] folyóiratcikk valamint a [GB3], [GB4] konferencia-cikkek témája egy egymáshoz körkörös csatolt Chua-Roska oszcillátorokból álló elektromos hálózat lassan lecsengő oszcillációinak vizsgálata szakaszonként lineáris aktivációs függvények esetén. A lassan lecsengő oszcillációk mögött nyeregyszerű, metastabil periodikus forgóhullámok állnak, amelyek exponenciálisan hosszú ideig aszimptotikusan stabilnak tűnnek. A szóbanforgó periodikus megoldások domináns Floquet sajátértéke lényegében $1+p^n$, összes többi Floquet sajátértéke pedig p^n , ahol p kicsiny, a csatolás alfa és béta paramétereitől függő pozitív szám, $n=2m$ pedig az oszcillátorok száma. A matematikai bizonyítás teljesen absztrakt (ellentétben a [GB1] dolgozat "számítógéppel segített" intervallum-aritmetikai jellegével), de a hozzá vezető utat a villamosmérnöki és számítógépes kísérletek tapasztalatai kövezték ki. Az eddig megjelent [GB2], [GB3], [GB4] publikációk teljességgel villamosmérnöki jellegűek, a [GB2] dolgozat utolsó három oldalán kimondott matematikai tételek bizonyítása egy matematikai folyóirathoz közlésre leadott és elfogadásra váró hosszabb dolgozatban található.

A [GB8] és a [GB9] publikációk egy megkezdett és szintén villamosmérnöki ihletettségű kutatási feladat – véges értékű hiszterézis dinamikák -- eddigi eredményeit tartalmazzák.

Hivatkozások

- [SP1] Simon, P.L., Taylor, M., Kiss, I.Z., Exact epidemic models on graphs using graph-automorphism driven lumping, *J. Math. Biol.*, 62, 479–508 (2011).
- [SP2] Kiss, I.Z., Cassell, J., Recker, M., Simon, P.L., The impact of information transmission on epidemic outbreaks, *Math. Biosci.* 225, 1-10 (2010).
- [SP3] Hatzopoulos, V., Taylor, M., Simon, P.L., Kiss, I.Z., Multiple sources and routes of information transmission: implications for epidemic dynamics, *Math. Biosci.*, 231, 197-209 (2011).
- [SP4] Bátkai, A., Kiss, I.Z., Sikolya, E., Simon, P.L., Differential equation approximations of stochastic network processes: an operator semigroup approach, *Netw. Heter. Media.*, 7, 43-58 (2012).
- [SP5] Szabó, A., Simon, P.L., Kiss, I.Z., Detailed study of bifurcations in an epidemic model on a dynamic network, *Differ. Equ. Appl.*, 4, 277-296 (2012).
- [SP6] Taylor, M., Simon, P.L., Green, D.M., House, T., Kiss, I.Z., From Markovian to pairwise epidemic models and the performance of moment closure approximations, *J. Math. Biol.*, 64, 1021-1042 (2012).
- [SP7] Simon, P.L., Kiss, I.Z., New moment closures based on a priori distributions with applications to epidemic dynamics, *Bull. Math. Biol.*, 74, 1501-1515 (2012).

- [SP8] Simon, P.L., Kiss, I.Z., From exact stochastic to mean-field ODE models: a new approach to prove convergence results, *IMA J. Appl. Math.*, 78 (5) 945-964 (2013).
- [SP9] Kiss, I.Z., Berthouze, L., Taylor, T.J., Simon, P.L., Modelling approaches for simple dynamic networks and applications to disease transmission models, *Proc. Roy. Soc. A*, 468 (2141), 1332-1355 (2012).
- [SP10] Nagy, N., Simon, P.L., Monte-Carlo simulation and analytic approximation of epidemic processes on large networks, *Central European Journal of Mathematics*, 11(4), 800-815 (2013).
- [SP11] Taylor, T.J., Hartley, C., Simon, P.L., Kiss, I.Z., Berthouze, L., Identification of criticality in neuronal avalanches: I. A theoretical investigation of the non-driven case, *J. Math. Neuroscience*, (2013), 3:5.
- [SP12] Csörgő, G., Simon, P.L., Numerical and analytical study of bifurcations in a model of electrochemical reactions in fuel cells, *Computers and Mathematics with Applications*, 65, 325-337 (2013).
- [SP13] Ghazaryan, A., Schechter, S., Simon, P.L., Gasless combustion fronts with heat loss, *SIAM J. Appl. Math.*, 73(3), 1303-1326 (2013).
- [SP14] Nagy, N., Kiss, I.Z., Simon, P.L., Approximate master equations for dynamical processes on graphs, *Math. Model. Nat. Phenom.*, 9 (2), 32-46 (2014).
- [SP15] Szabó-Solticzky, A., Simon, P.L., The effect of graph structure on epidemic spread in a class of modified cycle graphs, *Math. Model. Nat. Phenom.* 9 (2), 89-107 (2014).
- [SP16] Kiss, I.Z., Sélley, F., Morris, C.G., Simon, P.L., Wilkinson, R.R., Exact deterministic representation of Markovian SIR epidemics on networks with and without loops, *J. Math. Biol.* 70:437-464 (2015).
- [SP17] Sharkey, K.J., Kiss, I.Z., Wilkinson, R.R., Simon, P.L., Exact equations for SIR epidemics on tree graphs, *Bull. Math. Biol.* 77(4), 614-645 (2015).
- [SP18] Bátkai, A., Havasi, Á., Horváth, R., Kunszenti-Kovács, D., Simon, P.L., PDE approximation of large systems of differential equations, *Operators and Matrices*, 9 (1), 147-163 (2015).
- [SP19] Sélley, F., Besenyei, Á., Kiss, I.Z., Simon, P.L., Dynamic control of modern, network-based epidemic models, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 14(1), 168-187, (2015).
- [SP20] A. Besenyei, P. Simon, Asymptotic output controllability via Dynamic Matrix Control, *Differ. Eq. Appl.*, 4, 495-519 (2012).
- [BA1] Á. Besenyei, On a system consisting of three different types of differential equations, *Acta Math. Hungar.*, 127(1-2) (2010), 178-194.
- [BA2] Á. Besenyei, On some systems containing a parabolic PDE and a first order ODE, *Math. Bohemica*, 135(2) (2010), 133-141.
- [SL1] L. Simon, On some singular systems of parabolic functional equations, *Math. Bohemica* 135 (2010), 123-132.
- [SL2] L. Simon, On nonlinear functional parabolic equations with state-dependent delays of Volterra type, *Internat J. Qualitative Theory Differential Equations Appl.* 2 (2010), 88-103.
- [SL3] L. Simon, On singular systems of parabolic functional equations, *Operator Theory: Advances and Applications*, 216 (2011), 317-330.
- [SL4] L. Simon, Nonlinear second order evolution equations with state-dependent delays, *EJQTDE, Proc. 9th Coll. QTDE*, 2012, No. 14, 1-12.
- [SL5] L. Simon, Semilinear hyperbolic functional equations, *Banach Center Publications*, 101 (2014), 207-224.
- [SL6] L. Simon, On systems of semilinear hyperbolic functional equations, *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.* 59 (2014), 479-495.
- [SL7] L. Simon, On semilinear hyperbolic functional equations with state-dependent delays, *Recent Advances in Delay Differential and Difference Equations*, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 94, Springer, 2014, 233-250.
- [SE] K.-J. Engel, M. Kramar Fijavž, B. Klöss, R. Nagel, E. Sikolya, Maximal controllability for boundary control problems, *Appl. Math. Optim.* 62 (2010), 205-227.
- [SE1] András Bátkai, Eszter Sikolya, The norm convergence of a Magnus expansion method, *Cent. Eur. J. Math.* 10: pp. 150-158. (2012).
- [KPS] M. Kramar Fijavž, A. Peperko, E. Sikolya, Semigroups of max-plus linear operators, *elkuldve a J. Evol. Eq. folyóirathoz* (2014).
- [FI] I. Faragó, Discrete maximum principle for finite element parabolic models in higher dimensions, *Math. Comp. Sim.*, 80 (2010) 1601-1611.
- [FKSz] I. Faragó, S. Korotov, T. Szabó, On modifications of continuous and discrete maximum principles for reaction-diffusion problems, *Adv. Appl. Math. Mech.*, 3 (2011) 109-120.

- [FKK] I. Faragó, J. Karátson, S. Korotov, Discrete maximum principles for the FEM solution of some nonlinear parabolic problems, *IMA Numerical Analysis*, 32 (2012) 32, 1541–1573
- [HT1] Mincsovcics M. E., Horváth L. T.: On the differences of the discrete weak and strong maximum principles for elliptic operators, *Lecture Notes in Computer Science*, Springer 7116, 2012, 614—621.
- [HT2] Horváth L. T., Izsák F.: Implicit a posteriori error estimation using patch recovery techniques, *Cent. Eur. J. Math.*, 2012, 10(1), 55-72.
- [FHZ1] Faragó István, Havasi Ágnes, Zlatev Zahari (szerk.) *Advanced Numerical Methods for Complex Environmental Models: Needs and Availability*, Washington: Bentham Science Publ. Ltd., 2013. 418 p.
- [FIS] Farago I, Izsak F, Szabo T, An IMEX scheme combined with Richardson extrapolation methods for some reaction-diffusion equations, *Időjárás / Quarterly Journal Of The Hungarian Meteorological Service* 117:(2) pp. 201-218. (2013)
- [FHZ2] I. Faragó, Z. Zlatev et al. Application of Richardson Extrapolation for multi-dimensional advection equations. *Computer and Mathematics with Application*, 67 (2014) 2279-2293.
- [FHZ3] Zlatev Z, Farago I, Havasi:A. Mathematical treatment of environmental models, *Springer Series "Mathematics in Industry"*, Volume "Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2012, (2014) 65-70.
- [GB1] B.Indig, B.M.Garay, Chaos in Vallis' asymmetric model for El Nino, *Chaos Solitons and Fractals* 75(2015), 253--262.
- [GB2] M.Forti, B.M.Garay, M.Koller, L.Pancioni, Long transient oscillations in a class of cooperative cellular neural networks, *Int. J. Circuit Theory Applications* 43(2015), 635--655.
- [GB3] M.DiMarco, M.Forti, B.M.Garay, M.Koller, L.Pancioni, Multiple metastable rotating waves and long transients in cooperative CNN rings, In: *European Conference on Circuit Theory and Design (ECCTD)*, Dresden, September 2013, pp. 1--4. (electronic)
- [GB4] M.Forti, B.M.Garay, M.Koller, L.Pancioni, An experimental study on long transient oscillations in cooperative CNN rings, In: "*Proceedings of the 13th International Workshop on Cellular Nanoscale Networks and their Applications (August 29-31, 2012, Turin, Italy)*", pp. 6 (electronic)
- [GB5] B.M.Garay, A.Simonovits, J.Tóth, Local interaction in tax evasion, *Economics Letters* 115(2012), 412-415.
- [GB6] G.Colombo, M.Feckan, B.M.Garay, Inflated deterministic chaos and Smale's horseshoe, *J. Difference Eq. Appl.* 18(2012), 471--488.
- [GB7] G.Colombo, M.Feckan, B.M.Garay, Multivalued perturbations of a saddle dynamics, *Diff. Eq. Dyn. Syst.*, 18(2010), 29--56.
- [GB8] R.Csikja, B.M.Garay, J.Tóth, Chaos via two-valued interval maps in a piecewise affine model example for hysteresis, In : *Proceedings of the 18th International Symposium on the Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS)*, Budapest, July 2010, pp. 187--194. (electronic)
- [GB9] B.M.Garay, The Euler--Poincaré formula for systems with hysteresis in two dimension, *Ann. Univ. Budapest Sect. Math.*, 53(2010), 59-68.