OTKA K81310 Zárójelentés

A projekt kapcsán kb. 40 megjelent/elfogadott munka született a bő 4 év alatt, további közel 20 van folyamatban. Kiemelném, hogy ezek között van négy olyan megvédett PhD értekezés (Fancsali Szabolcs, Csajbók Bence, Héger Tamás, Harrach Nóra), és egy MTA doktori disszertáció (Sziklai Péter), amelynek létrejöttében az OTKA projektnek fontos szerepe volt, valamint további két doktori dolgozat áll közvetlen beadás előtt (Nagy Zoltán Lóránt és Takáts Marcella).

A kutatási eredményeket jórészt (informális) nemzetközi együttműködésben értük el, több témán dolgoztunk Aart Blokhuis-szal, Andries Brouwer-rel, Leo Storméval és tanítványaival (Jan De Beule, Geertrui Van De Voorde, Maarten De Boeck), Korchmáros Gáborral és a körülötte levő olasz kollégákkal (Franco Mazzocca, Giuseppe Marino, Angelo Sonnino, Francesco Pavese) is. Több hazai és külföldi kutatóval konzultáltunk egy-egy témában, illetve meghallgattuk szemináriumi előadásaikat (Kovács István, Nagy Gábor, Ruff János, Bacsó Gábor). Ezek a konzultációk, előadások nem minden esetben vezettek közvetlen publikációkhoz, de szervesen kapcsolódtak a projekt témáihoz.

Mivel a pályázat extremális kombinatorika és véges geometria kapcsolatáról szól, először a tisztán extremális eredményeket ismertetjük, majd azokat, amelyben a véges geometria előbukkan, végül pedig a véges geometriai extremális kérdések kerülnek sorra. A megjelent vagy elfogadott cikkekben szereplő eredményeket röviden, a friss eredményeket részletesebben ismertetjük.

Csikvári Péter több dolgozatában gráfok, ill. speciálisan fák transzformációit vizsgálta (pl. a Kelmans-transzformációt és az általánosított fatranszformációt). Kiderült, hogy ez rengeteg gráfpolinomnak növeli (csökkenti) az együtthatóit abszolút értékben, ill. növeli a legnagyobb gyök értékét. Az előkészületben levő [4] cikkben Csikvári Zhicong Linnel fák homomorfizmusainak számát vizsgálta. Többek között belátták, hogy adott csúcsszámú fák közül a csillagnak van a legtöbb endomorfizmusa, az útnak pedig a legkevesebb. Megmutatták, hogy adott csúcsszámú fák közül az útnak van a legkevesebb homomorfizmusa egy adott hosszúságú útba. Csikvári Frenkel Péterrel kiterjesztette Abért és Hubai Benjamini–Schramm konvergens korlátos fokú gráfsorozatok kromatikus polinomjaira vonatkozó eredményét korlátos exponenciális típusú gráfpolinomokra. Csikvári Abért Miklóssal és Hubai Tamással ([1]) a statisztikus fizika egy klasszikus problémájára alkalmaztak a nemrég bevezetett párosítási mértéket. Ezzel a $\mathbb{Z}^d$ monomer-dimer szabad energiájára adtak az eddigieknél pontosabb becsléseket kis d-k esetén. A cikk célközönsége a statisztikus fizikusok, de a leírt eredmények matematikailag teljesen precízek. Csikvári [2] Friedland ún. alsó párosítási sejtését bizonyítja be a sejtettnél erősebb formában. Ez a sejtés Schrijver egy nevezetes tételének kiterjesztése, amely d-reguláris páros gráfok teljes párosításainak számára ad aszimptotikusan pontos alsó becslést. CSIKVÁRI [3] csúcstranzitív páros gráfok párosításait vizsgálta. Jó néhány klasszikus reguláris páros gráfokra vonatkozó tétel erősítését adta ezen grafokra. A Turán problémakör egy sűrűségi változata a következő probléma: milyen élsűrűség garantálja a H gráf egy felfújtjában H-nak részgráfként való megjelenését? A problémát fákra NAGY ZOLTÁN LÓRÁNT megoldotta, az általános esetben CSIKVÁRIval jó becslést adtak a legnagyobb fokszám függvényében. NAGY irányított tournamentet tartalmazó teljes gráfokban a mindkét irányban irányított élek számának függvényében meghatározta a legnagyobb tranzitív tournament méretét. Emellett meghatározta a legnagyobb monokromatikus klikk méretét, ha egy teljes n csúcsú gráf éleit színezzük ki két színnel úgy, hogy meghatározott számú élet mindkét színnel kiszínezhetünk. NAGY több társszerzővel maximális metsző reguláris halmazrendszerek maximális és minimális fokszámának arányát tanulmányozta. Az aszimptotikusan éles példák véges geometriákból származnak. További két, többszerzős cikkben az extremális stuktúrák vizsgálata extremális gráfelmélet határterületeiben történt, kombinatorikus játékelméletben, illetve egy kódelméletivel rokon gráfelméleti keresési problémában. A gráfelméleti eszköztár mellett ezekben valószínűségi módszerekkel is dolgoztunk, illetve utóbbi témában a nem triviális exremális példa a Fano sík illeszkedésén alapult.

HÉGER TAMÁS ÉS WEINER ZSUZSA Gács Andrással elkezdett munkájukat befejezve, a cage-gráfok problémaköréhez kapcsolódóan algebrai módszerekkel leírták az összes, $\mathrm{PG}(2,q)$ illeszkedési gráfjának feszített részgráfjaként előálló kis, k-reguláris, 6 bőségű gráfot, ha $q-k$ kicsi. HÉGER és SZŐNYI TAMÁS Damásdi Gáborral vizsgálták a Zarankiewicz-probléma egy esetét, a C_4-mentes páros gráfok maximális élszámát. Számos, véges síkokhoz „közeli" esetben, viszonylag tág paramétertartományban meghatározták a vonatkozó Zarankiewicz-számok pontos értékét. SZŐNYI extremális kombinatorikai problémák q-analógjait vizsgálta több dolgozatban is, elsősorban Blokhuis-szal és Brouwer-rel együttműködve. A kritikus $n = 2k$ esetben meghatározták a q-Kneser-gráf kromatikus számát, valamint a $k = 3$ esetben nagyon pontos leírást adtak a nagy független ponthalmazokról. Egy idén megjelent cikkben az általánosított q-Kneser-gráf elég nagy független halmazait írták le teljesen. A témakörből WEINER ZSUZSÁVAL is írtak egy, a lefogó ponthalmazokra vonatkozó stabilitási tételek és a fenti vektortér analógok kapcsolatáról szóló dolgozatot.

HÉGER és TAKÁTS MARCELLA Robert F. Bailey felvetésére véges projektív síkok (illeszkedési gráfjának) megoldó- és féligmegoldó-halmazait vizsgálták. Megmutatták, hogy minden $q \geq 23$ rendű véges projektív sík metrikus dimenziója $4q-4$, és leírták az összes ekkora megoldóhalmazt. Megmutatták továbbá, hogy $\mathrm{PG}(2,q)$ minden elég kicsi féligmegoldó-halmaza kiegészíthető kétszeres lefogó halmazzá legfeljebb két pont hozzávételével. HÉGER ÉS TAKÁTS Patkós Balázzsal a klasszikus kombinatorikus keresés q-analógját vizsgálták, azaz egy $\mathrm{GF}(q)$ feletti vektortér valamely egydimenziós altere azonosításának lehetőségét. Az azonosításhoz választhatunk egy alteret, és megkérdezhetjük, hogy a kérdéses egydimenziós altér része-e annak. Kétféle keresési módot vizsgáltak: az adaptív és a nem adaptív keresést. Kiderült, hogy már három dimenzióban is a klasszikus esettől eltérően a minimális kérdésszám a két változatban nem egyezik. A három dimenziós esetben adaptív keresésnél $2q-1$ kérdés szükséges és elegendő, míg a nem adaptív keresésnél ennél mindig több, és a válasz erősen függ a q számelméleti jellemzőitől is. Az eredmények bizonyításához a lefogó ponthalmazokra és a féligmegoldó-halmazokra vonatkozó ismeretekre volt szükség. Eme keresési probléma vizsgálata érdekes kérdéseket vetett föl hipersíkgeneráló halmazokról. Ezzel kapcsolatban Fancsali Szabolcs és Sziklai Péter megvizsgálták, hogy legalább hány egyenes kell ahhoz a $\mathrm{PG}(d,\mathbb{F})$ projektív térben, hogy minden hipersíkot generáljon ezen egyeneseknek az adott hipersíkkal való metszete. Bebizonyították, hogy ha az $\mathbb{F}$ test elég nagy, akkor egy ilyen tulajdonságú egyeneshalmaz legalább $\lfloor 1.5d \rfloor$ egyenest tartalmaz. Algebrailag zárt $\mathbb{F}$ test fölött egy ilyen tulajdonságú egyeneshalmaznak legalább $2d-1$ egyenesből kell állnia. Ha a test $\geq 2d-1$ elemű, akkor konstrukciót adtak ilyen méretű halmazra. A téma szorosan összefügg az erős, illetve gyenge (s,A) altérdizájnokkal. Belátták, hogy a Guruswami és Kopparty által konstruált explicit altérdizájnok A paramétere kisebb a vártnál. Most készülő cikkükben [5] Fancsali és Sziklai a fenti eredményüket általánosítják síkokra és magasabb dimenziós alterekre: be kívánják bizonyítani, hogy $\mathrm{PG}(d,\mathbb{F})$ projektív térben az $L_{i_0\ldots i_k}(t) = V(\omega^{i_0},\ldots,\omega^{i_k})\cdot t^{i_0+\cdots+i_k-k-1}$ Plücker-koordinátákkal jellemzett k-dimenziós projektív alterek (ahol $t\in\mathbb{F}$ az alaptestből $(k+1)\cdot(d-k)+1$ darab különböző elem, ω pedig egy legalább $(d+1)$ rendű testelem) úgy metszenek minden k-kodimenziós projektív alteret, hogy a metszet generálja az adott k-kodimenziós alteret. Algebrailag zárt test felett nem létezik ennél kevesebb k-dimeniós altérből álló ilyen tulajdonságú halmaz.

Számos vizsgálatot folytattunk klasszikusnak mondható és újabban kutatott véges geometriai struktúrákkal és azok stabilitásával kapcsolatban. Fancsali, Sziklai és Takáts általánosították Blokhuis, Ball, Brouwer, Storme és Szőnyi q affin pont által meghatározott irányokról szóló klasszikus eredményét q-nál kevesebb $\mathrm{AG}(2,q=p^h)$ affin síkbeli pontra.Két paraméter segítségével lehetett alsó és felső becslést adni a meghatározott irányok számára. Hasonló eredmény korábban csak a $q=p$ prím esetre volt ismert. Jan De Beule, Sziklai és Takáts nagyon általános módon igazolták, hogy $\mathrm{AG}(n,\,q)$ egy q^{n-1}-nél kicsit kisebb ponthalmaza kiegészíthető q^{n-1} pontúvá úgy, hogy az általuk meghatározott irányok halmaza változatlan marad, hacsak a nem-meghatározott irányok halmaza nem nagyon speciális struktúrájú. Sziklai és Takáts definiálták a klasszikus „meghatározott irány” fogalmának egy természetes általánosítását. Az új definíció alapján bizonyos estekben klasszifikálták az extremális, azaz q^{n-1} pontú, nem minden irányt meghatározó affin ponthalmazokat.

Harrach Nóra, Szőnyi Tamás és Weiner Zsuzsa Klaus Metsch-csel p^3 elemű testre épített projektív terek lefogó ponthalmazaira vizsgálta Sziklai linearitási sejtését és ért el előrelépést. A sejtést erre az esetre végül Harrach és Metsch, valamint tőlük függetlenül Lavrauw, Storme és Van De Voorde bizonyították. Sziklai és Van De Voorde bebizonyították, hogy PG(n,p^t)-ben egy olyan kis minimális lefogóhalmaz, mely $(t-1)$-dimenziós alteret feszít, lineáris. Harrach belátta, hogy ha egy (súlyozott) t-szeres $(n-k)$-lefogó ponthalmaz mérete (súlya) kisebb, mint $(t+1)q^{n-k}+(q^{n-k}-1)/(q-1)$, akkor az általa tartalmazott minimális (súlyozott) t-szeres $(n-k)$-lefogó ponthalmaz egyértelmű. Alsó becslést adott egy t-szeres $(n-1)$-lefogó ponthalmaz egy szükséges pontjára illeszkedő t-szelő egyenesek számára. Harrach és Leo Storme projektív terek lefogó ponthalmazait vizsgálta, és általánosította Blokhuis, Lovász, Storme és Szőnyi egy síkokban elért eredményét. Ferret, Storme, Sziklai és Weiner négyzetrendű projektív terek többszörös lefogóhalmazainak egy karakterizációját adták meg. Harrach Nóra és Leo Storme magasabb dimenziós terek részleges fedéseit is tanulmányozták. Megmutatták, hogy ha PG(n, q)-ban hipersíkok egy nem túl nagy halmaza δ pontot hagy fedetlenül, ahol δ nem túl nagy, akkor δ/q^{n-1} hípersík hozzávételével kiegészíthető teljes fedéssé. Ez az eredmény a duális megfogalmazásban Weiner Zsuzsa és Szőnyi Tamás síkbeli kis lefogó ponthalmazok stabilitásáról szóló tételének általánosítása.

Szőnyi és Weiner folytatták PG$(2, q)$ kombinatorikusan definiált ponthalmazai stabilitásának vizsgálatát. A pályázat kezdetekor volt egy hosszú kéziratunk stabilitási kérdésekről, ezt szedtük részekre és fejlesztettük tovább. Nem csupán számos pontatlanságot és (kisebb) hibát kellett javítanunk, hanem lényeges új eredmények is születtek. A páros halmazok esetén a q közeli méretű halmazokat metsző egyenesek számára vonatkozó stabilitást igazoltunk, ha q páros illetve az ilyen méretű $(0, 2, 3)$ halmazok nemlétezését láttuk be. Itt a legkevesbb egyenest metsző ponthalmaz a hiperoválís, de a stabilitás nem erre, hanem páros halmazokra vonatkozik. Az eredmény alkalmazható arra, hogy páros rendű síkon a kis Kakeya-halmazokat meghatározzuk. A kis lefogó ponthalmazok stabilitásánál az algebrai görbés részben a bizonyítások teljesen újak, a kitérő egyenesek számára adott korlátunk pontosabb, illetve a q prím esetben új példákat adtunk olyan halmazokra, amely módszerünk határait mutatja. Ezeket az eredményeket egy még benyújtás előtt álló kéziratban [19] kiterjesztettük egyrészt multihalmazokra, másrészt t modulo p halmazokra, páratlan q esetén. Itt az a feltétel, hogy a **nem** t modulo p szelők száma kicsi legyen, a konklúzió pedig az, hogy a halmaz egy alkalmas t modulo p halmazból áll elő pontok (ill. azok multiplicitásának) módosításával. Ezeket az eredményeket a $t = 0$ esetben projektív síkok egyenesei által generált kódok kis súlyú kódszavainak leírására (t.i. hogy ezek egyenesek lineáris kombinációi) tudtuk használni. Érdekesség, hogy a prímrendű alaptest esetén csak a kódszó súlyáról tudunk mondani valamit, itt általában nem igaz, hogy a kis súlyú kódszavak csak egyenesek lineáris kombinációi lehetnek. A De Boeck és Vandendriessche által adott $3p$ súlyú kódszavakat, melyek nem állnak elő 3 egyenes lineáris kombinációjaként, sikerült leírnunk. Ugyancsak érdekes a $t = 1$ eset, amikor az unitálok stabilitására vonatkozó eredményeket kapunk (legalábbis a $q = p^2$ esetben).

Vizsgáltunk olyan (hiper)gráfszínezési és gráffaktorizációs kérdéseket is, melyek kapcsolatban állnak véges geometriákkal. Egy hipergráf fölső kromatikus száma az a legnagyobb színszám, mellyel megszínezhetők a csúcsai anélkül, hogy keletkezne szivárvány (azaz olyan hiperél, melynek nincsenek azonos színű csúcsai). Ha a színezés kiegyensúlyozott (azaz a színosztályok mérete legfeljebb eggyel térhet el egymástól), akkor kiegyensúlyozott fölső kromatikus számról beszélünk.

Héger és Szőnyi Bacsó Gáborral közösen véges projektív síkok mint hipergráfok fölső kromatikus számát vizsgálták. Megjavították Bacsó és Tuza erre vonatkozó korábbi kombinatorikus becslését, továbbá testre épített síkok esetén pontos választ adtak bizonyos, a sík rendjére és a test karakterisztikájára vonatkozó feltételek mellett. A válasz szoros kapcsolatban áll a sík legkisebb kétszeres lefogó ponthalmazának méretével. Explicit példát adtak két diszjunkt lefogó ponthalmazra a q nem-négyzet esetben. Héger és Szőnyi kiterjesztették a fenti eredményt magasabb dimenziós projektív terekre. Itt a vizsgált hipergráf a $\mathrm{PG}(n, q)$ tér pontjaiból és annak k dimenziós altereiből (mint hiperélekből) áll.Ha $k > n/2$, a síkon használt módszerek általánosíthatók, és analóg eredmények nyerhetők, felhasználva a magasabb dimenziós terek többszörös lefogóhalmazaira ismert eredményeket. Araujo-Pardo, Kiss és Montejano a [9] cikkben ugyanezen hipergráfok kiegyensúlyozott kromatikus számára adtak korlátokat, valamint új optimális színezéseket konstruáltak. Araujo-Pardo, Kiss, Rubio-Montiel és Vázquez-Ávila a [10] cikkben különböző blokkrendszerek pszeudoakromatikus indexét vizsgálták. Meghatározták a véges affin síkok indexének pontos értékét és korlátokat adtak véges projektív terek indexeinek értékeire. Kiss és Rubio-Montiel a λK_v teljes multigráfok néhány új, egyszerű és felbonthatatlan m-faktorizációjának konstrukcióit adták meg különböző m, λ és v értékekre, felhasználva az affin és projektiv terek altereit, részgeometriáit és egyéb geometriai konfigurációit.

Több dolgozat született szemioválisok es szemiívek kutatásából. Egy véges projektív sík egy nemüres S_t ponthalmazát t-szemiívnek nevezünk, ha minden pontjában pontosan t darab érintő egyenese (azaz a halmazt egy pontban metsző egyenese) van. A klasszikus példák ilyenekre a szemioválisok (ezek az 1-szemiívek) és a részsíkok. Csajbók Bence és Kiss György alsó és felső korlátokat adtak szemiívek méretére, valamint vizsgálták azon szemiíveket, melyeket egy sugársor három egyenese tartalmaz. Additív csoportelméleti tételek segítségével korlátokat adtak ezen szemiívek méretére, valamint teljesen leírták az ún. erős szemioválisokat. Bartoli, Kiss, Marcugini és Pambianco egy elfogadott dolgozatban megadták a 2-szemiívek teljes leírását a $\mathrm{PG}(2,q)$ síkokon, ha q kis páratlan prímhatvány. Csajbók Dover szemioválisokra vonatkozó eredményeit általánosítva azokat a t-szemiíveket vizsgálta, melyek tartalmaznak $q+1-t$ kollineáris pontot ($t \geq 2$). Belátta, hogy q rendű projektív síkon ez csak $t \geq \sqrt{q-1}$ esetén lehetséges, és erősebb, éles korlátot adott $\mathrm{PG}(2,q)$-ban. Korchmáros és Mazzocca perspektív ponthalmazokra vonatkozó eredményeit felhasználva karakterizációs tételeket igazolt. A [11] cikkben Csajbók, Héger és Kiss a Rédei-polinom és a Szőnyi–Weiner-lemma segítségével vizsgálták azon szemiíveket $\mathrm{PG}(2,q)$-ban, melyeknek van nagy kollineáris részhalmaza. Ezekhez kicsi lefogó ponthalmazokat rendeltek, majd a kis lefogó halmazok struktúrájára vonatkozó tételeket alkalmazva erős karakterizációs tételeket igazoltak a szemiívekre. Segre „érintők lemmája"-nak számos alkalmazása van. Csajbók a Segre-féle módszert polinomos módszerekkel (pl. Rédei polinomok, interpoláció) kombinálva $\mathrm{PG}(2,q)$ kis méretű szemioválisait, illetve kis méretű ponthalmazok páratlan szelőinek minimális számát vizsgálta. Blokhuis karakterizálta $\mathrm{PG}(2,q)$ azon $q-1+a$ méretű szemioválisait, melyeket a sík minden egyenese 0, 1, 2 vagy a pontban metsz. Csajbók általánosította a Blokhuis-féle eredményt, illetve új strukturális eredményeket adott olyan $q-1+a$ méretű szemioválisokra, melyek tartalmaznak a elemű kollineáris ponthalmazt. Az elmúlt évek számítógépes kutatásai azt sejtetik, hogy $\mathrm{PG}(2,q)$-ban kicsi a és $q > 2a+1$ esetén a legfeljebb $q-1+a$ méretű szemioválisok egyedül az oválisok. Az $a=3$ esetben ezt Blokhuis igazolta. Háromnál nagyobb karakterisztikájú síkokon Csajbók belátta az $a=4$ esetet. Egy friss cikkükben Balister, Bollobás, Füredi és Thompson azt vizsgálták, hogy páratlan q és rögzített k esetén legkevesebb mennyi darab páratlan szelője lehet $\mathrm{PG}(2,q)$ k elemű ponthalmazainak. Csajbók a kis méretű szemioválisok vizsgalatára kifejlesztett módszerek segítségével a $(q+2)$, illetve $(q+3)$-elemű ponthalmazok páratlan szelőinek számára adott korábbi alsó korlátokat megjavította. Azt reméljük, hogy eredményeink tovább javíthatóak, ezért ezek az eredmények még nem kerültek benyújtásra.

Nagy Károlyi Gyulával közösen a statisztikus fizikából eredő polinomazonosságokra vonatkozó tételek és sejtések megközelítési lehetőségét vizsgálta Alon Kombinatorikus Nullhelytétele segítségével. A q-analógián keresztül történő bizonyítás a klasszikus Dyson-azonosság mellett sikeresnek bizonyult a Morris, Kadell-Aomoto, és Forrester nevével jelzett azonosságok igazolására is. A bizonyítások erénye a más problémákra (pl. összeghalmazok) való alkalmazhatóság.

Minden biuniform matroid reprezentálható valamilyen kellően nagy test felett. Azonban nem tudjuk, hogy milyen nagynak kell lennie a testnek, valamint általános konstrukció sem ismert ilyen reprezentációra. Weiner társszerzőivel egy olyan általános módszert mutattak be bi-uniform matroidok reprezentációjára, amelynél sok esetben a test dimenziója kisebb a korábban ismertnél (melyek ráadásul csak a biuniform matroidok egy osztályára működtek).

Hivatkozások

[1] M. Abért, P. Csikvári and T. Hubai, Matching measure, Benjamini-Schramm convergence and monomer-dimer free energy, Arxiv 1405.6740

[2] P. Csikvári, Lower matching conjecture and a new proof of Schrivjer's and Gurvits's theorems, Arxiv 1406.0766

[3] P. Csikvári, Matchings in vertex-transitive bipartite graphs, Arxiv 1407.5409

[4] P. Csikvári, Z. Lin, Graph homomorphisms between trees, Arxiv 1307.6721

[5] Sz. L. Fancsali, P. Sziklai: Subspaces in higgledy-piggledy arrangement, *előkészületben.*

[6] N. V. Harrach, L. Storme, t-fold blocking sets of $\mathrm{PG}(n, p^{6m})$ intersecting every hyperplane in t mod p^{2m} points, *előkészületben.*

[7] N. V. Harrach, L. Storme, Partial covers of $\mathrm{PG}(n, q)$, *előkészületben.*

[8] T. Héger, T. Szőnyi, The upper chromatic number of projective spaces, kézirat

[9] G. Araujo-Pardo, Gy. Kiss, A. Montejano *Balanced rainbow-free colorings in cyclic projective planes and projective spaces,* J. Combin. Des., benyújtva.

[10] G. Araujo-Pardo, Gy. Kiss, C. Rubio-Montiel, A. Vázquez-Ávila, *Achromatic and pseudoachromatic indices of designs,* kézirat.

[11] B. Csajbók, T. Héger, Gy. Kiss, *Semiarcs with a long secant in* $\mathrm{PG}(2, q)$, Innov. Incidence Geom., benyújtva.

[12] Gy. Károlyi, Z. L. Nagy, Proof of a q-Aomoto integral and a conjecture of Forrester, (published on ArXiv)

[13] Z. L. Nagy, Density version of the Ramsey problem and the directed Ramsey problem, ArXiv 1401.6823

[14] Z. L. Nagy, Applications of the Combinatorial Nullstellensatz *PhD értekezés*, 2014. szept.

[15] A. Grzesik, M. Mikalački, Z. L. Nagy, A. Naor, B. Patkós, F. Skerman, Avoider-Enforcer star games, ArXiv 1302.2555

[16] Y. Kim, M. Kumbhat, Z. L. Nagy, B. Patkós, A. Pokrovskiy, M. Vizer, Identifying codes and searching with balls in graphs, ArXiv 1405.7508

[17] M. Takáts, Directions and other topics in Galois-geometries *PhD értekezés*, 2014. szept.

[18] T. Szőnyi, Zs. Weiner, On the stability of sets of even type, *Adv. Math.*, benyújtva

[19] T. Szőnyi, Zs. Weiner, On the stability of t modulo p multisets, kézirat folyamatban.