

A pályázat címe: *Tartószerkezetek topológia és "layout" optimalásának alapvető feladatai: determinisztikus és sztochasztikus alkalmazások*

(Részletes jelentés)

Az alábbiakban a pályázat keretében elért kutatási eredményeket foglaljuk össze. Irodalomkutatási munkánk eredményeit összefoglaló jellegű könyvfejezetekben ismertettük. Ezekben közre adtuk az eddig fellelhető analitikusan meghatározott optimális topológiákat és a sztochasztikus topológia optimalás numerikus eljárásait. A munkákat felhasználtuk a megvédett disszertációk írásánál.

Analitikusan meghatározott optimális topológiákat számoltunk a kétszeres szimmetriával rendelkező kettő koncentrált erővel terhelt rácsos és „truss-like” tartókra. Numerikusan is ellenőriztük ezeket. Kiigazítással élhettünk a Michell féle analitikus megoldással kapcsolatban, ami egy teheresetre és feszültségi korlátra vonatkozott. Olyan megoldásokat kutattunk, ahol az eredeti Michell-féle optimalitási feltétel vagy a Hemp-féle ortogonalitási elv nem érvényes. Ezzel eredményt mutattunk a feszültségi korlátra vonatkozó munkarészünkre is.

Továbbá analitikusan meghatározott optimális topológiákat kiterjesztettük a húzásra és nyomásra különbözően viselkedő rúdelemekből felépített szerkezetekre vonatkozóan. Itt megoldási javaslattal élünk,arra az esetre, ha hiányos (vagy nincs) „adjont” elmozdulás mező.

A sztochasztikus topológia optimalás területén új számítási eljárásokat fejlesztettünk ki a valószínűségi változóval megadott támadáspontú terhelés esetére. Itt három módszert dolgoztunk ki, melyek alkalmasak az iteráción alapuló, az előző OTKA kutatásunkban leírt módszer általánosításával nyert eljárás kiterjesztésére. Egyszerűbb esetekben az általunk „adjoint” módszernek nevezett eljárással a szerkezeti támasz – külső erő felcseréléssel oldottuk meg a feladatot. A második eljárásban a -3szigma, +3szigma intervallumon belül erőszétosztás alapján épült fel a mechanikai modell. A harmadik eljárásban szimulációval valószínűségi értékeket rendeltünk az egyes teherpozíciókhoz és így „építettük” fel a helyettesítő determinisztikus feladatot. Mindhárom modellhez számítógépes programokat is készítettünk FORTRAN nyelven. Parametrikus vizsgálataink eredményeképpen több numerikusan meghatározott valószínűségi változóval megadott támadáspontú terhelésű tartó optimális topológiáját határoztuk meg.

A sztochasztikus topológia optimalás során mint helyettesítő feladat, egymást kizáró, több terhelési esetre készítettünk mechanikai modelleket.

A megbízhatóságelmélet felhasználásával számítási eljárásokat fejlesztettünk ki vázas szerkezetek „layout” optimalására. A képlékenységtan alaptételeinek szélesítésével építettük fel a mechanikai feladatunkat.

Numerikus számítási eljárást adtunk közre puhuló-lágyuló anyagok figyelembe vételével vázas szerkezetek számítására. Ez jó kiindulópontot adott a földrengésteherral terhelt szabványos számítások javítására. Itt a gyengeszinti folyási mechanizmusok elkerülésére eljárást készítettünk.

Eredményeink a pályázat időszakában igen széleskörűek: 62 publikáció (15 folyóiratcikk – ezek összesített impact faktora:15.165-, 1 MTA és 2PhD disszertáció), ezekre 53 hivatkozás (MTMT), ami 100 fölötti Google hivatkozást eredményezett ezen 5 év alatt.

Valamennyi témában számos mintapéldát is megoldottunk és azok eredményeit elemeztük. Ezek ismertetésére ezen a helyen is csak nagyon korlátozottan van lehetőség. Itt csak néhány részt ismertetünk a fentiekben felsorolt eredmények közül. A publikációkból a további munkarészek megtudhatók.

Válogatott fejezetek a kutatási programból:

1. Sztochasztikus topológia optimalás és analitikusan meghatározott topológiák

A jobb megértés érdekében röviden ismertetjük a kidolgozott algoritmust kiindulva a determinisztikus feladatból. Alkalmazva a végeselemes alapfogalmakat, tekintsük az alábbi tervezési esetet:

- Legyen a lineárisan rugalmas anyagú szerkezet (tárcsa) 2D tervezési tartománya ismert. A szerkezetet a végeselemes diszkretizálás szabályi szerint osszuk fel G ($g=1,2,\dots,G$) alaptartományra. Az egyes tartományok t_g vastagsága legyen konstans (egységnyi). Minden alaptartományt osszuk fel további E_s ($e=1,2,\dots,E_s$) elemre. (Gyakorlatilag ez azt jelenti, hogy a hálózat generáláskor egy elsődleges hálózatot készítünk, majd ezt tovább osztjuk egy másodlagos hálózattal.)
- A terhelés egyparaméteres, statikus, determinisztikus adatokkal leírt.
- A megtámasztások adatai adottak.
- Adottak az elmozdulási korlátokat definiáló feltételek – hely ($d=1,2,\dots,D$) és nagyság -.

Felhasználva az előbbi normált vastagságú szerkezetet, a linearitás miatt a feladat könnyen áttranszformálható egy $t_g = t_{\max}$ vastagságú szerkezet vizsgálatára. Belátható, hogy a terheket $t_g = t_{\max}$ tetszőleges értékkel beszorozva a kapott feladatban a feszültségek, alakváltozások és elmozdulások azonosak lesznek az eredeti normált feladat eredményeivel.

A szerkezet W súlyát az alábbi módon számíthatjuk:

$$W = \sum_{g=1}^G \gamma_g A_g t_g. \quad (1.1)$$

Itt γ_g a szerkezet anyagának fajsúlya, A_g a g-edik alapelem területe. Az elmozdulási korlát a szerkezet adott pontjában a tényleges elmozdulás ismeretében, amit a tartók statikájában ismert módon számíthatunk, felírható:

$$\hat{\mathbf{u}}_d^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \Delta_d \leq 0; \quad (d = 1, \dots, D), \quad (1.2.a)$$

ahol $\hat{\mathbf{u}}_d$ a d-edik helyen és irányban ható, egységnyi nagyságú virtuális erőből számított virtuális csomóponti elmozdulások vektora, \mathbf{K} a szerkezet merevségi mátrixa, \mathbf{u} a \mathbf{P} teherből számított tényleges csomóponti elmozdulások vektora, Δ_d a d-edik elmozdulásra előre megadott korlát nagysága.

Abban az esetben, ha egyetlen elmozdulási korlátot ($d=1$) veszünk fel a szerkezet egy megadott pontjában, és a terhelés is csak itt hat, belátható, hogy (1.2.a) feltétel helyettesíthető a következő kifejezéssel:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - C \leq 0; \quad (1.2.b)$$

ahol C (compliance) a külső potenciális energia. A továbbiakban ezt az (1.2.b) egyenlőtlenséget használjuk a topológiaoptimalás matematikai programozási feladatában. (Ezt az ún. (compliance) tervezési módszer elméletét Hegemier és Prager (1969) bizonyította és általános tervezési módszernek javasolta.)

Továbbá adjunk meg minden alaptartomány t_g vastagságára egy alsó, illetve egy felső korlátot (praktikusan $t_{\min} \approx 0$ és $t_{\max} = 1$):

$$\begin{aligned} -t_g + t_{\min} &\leq 0; \quad (g = 1, \dots, G), \\ t_g - t_{\max} &\leq 0; \quad (g = 1, \dots, G). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Ezek a korlátok (0 és 1) gyakorlatilag azt szolgálják, hogy a tervezés eredményeként azt adott elem létezik-e vagy nem. Ahhoz, hogy elkerüljük a közbenső vastagsági értékeket a szerkezet súlyát egy módosított képlettel számoljuk. Az új formula $\tilde{W} = \sum_{g=1}^G \gamma_g A_g t_g^p$, ahol p ($p \geq 1$) a büntető paraméter, és szerepe ugyan az, mint a klasszikus OC módszereknél használt büntető paraméter. Megjegyezzük, hogy $t_g = 0$ és $t_g = 1$ esetén a módosított képlet is a tényleges súlyt szolgáltatja.

A topológiaoptimálás alapfeladata büntető paraméterrel kifejezett súly-célfüggvény és „compliance”-feltétel alkalmazásával a következőképpen adható meg:

$$\min \tilde{W} = \min \sum_{g=1}^G \gamma_g A_g t_g^p \quad (1.4.a)$$

az alábbi feltételek mellett

$$\begin{cases} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - C \leq 0; \\ -t_g + t_{\min} \leq 0; \quad (g = 1, \dots, G), \\ t_g - t_{\max} \leq 0; \quad (g = 1, \dots, G). \end{cases} \quad (1.4.b-d)$$

Az (1.4) matematikai programozási feladatban az \mathbf{u} csomóponti elmozdulások vektora a $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{P}$ lineáris egyenletrendszerből meghatározott a ható \mathbf{P} terhelés hatására.

1.1 Topológiaoptimálás valószínűségi változókkal adott terhek esetén

A valószínűségszámítás, mint matematikai elmélet régóta szerepet játszik a mérnöki tervezésben és az azt szabályzó nemzeti szabványokban. A valószínűségi adatokkal megadott tervezés azonban annak komplex volta miatt nem tudott teret nyerni a fontosságának megfelelően, ahol nem elkerülhetetlen, ott ma is a determinisztikus adatokra épülő tervezés játszik elsődleges szerepet. A sztochasztikus számítás elmélete, a megbízhatósági elméletre alapuló optimális tervezés hosszú ideje foglalkoztatja a kutatókat (lásd Marti), de napjainkban került igazán az optimális tervezéshez kapcsolódó kutatások középpontjába. Ennek további igen fontos bizonyítéka, hogy két fontos nemzetközi folyóirat (ZAMM és a Structural and Multidisciplinary Optimization) is speciális számot adott ki a témakörben 2007-ben és 2008-ban. A kutatási területek igen szerteágazóak, de a topológiaoptimálás területén belül nagyszámú tervezési változó alkalmazásával nem publikáltak hatékony eljárást. Jelen alfejezetben az előzőleg megadott módszert terjesztjük ki valószínűségi változókkal megadott terhek esetére, ahol ismertnek tételezzük fel a terhek eloszlását, várható értékét és szórását. A teher megadáshoz szükséges adatok (nagyság, irány-hatásvonal, támadáspont) közül az erő nagyságának és támadáspontjának a bizonytalanságait figyelembe vevő számítási eljárásokkal foglalkozunk. Az irány-hatásvonal problémaköre az erő nagyságból adódó bizonytalansággal kezelhető egy egyszerű dekompozíció elvégzésével. Az általunk kidolgozott eljárás Prékopa által publikált tételén alapszik, amely szerint egy valószínűségi változók lineáris kombinációjából képzett valószínűséggel korlátozott feltétel, egy vele egyenértékű, konvex determinisztikus kifejezéssé alakítható. Ennek fontossága miatt ezt röviden ismertetjük. A

tétel Kataoka tételére épül.

1.1.1 A feladat matematikai alapjai

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók, normális eloszlásúak. Továbbá legyen adott egy valós számokból alkotott $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$ vektor, amely kielégíti a következő egyenlőtlenséget:

$$\text{Prob}(x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \dots + x_n\xi_n \leq 0) \geq q; \quad (1.5)$$

Prékopa megmutatta, hogy az előző (1.5) egyenlőtlenség ekvivalens a

$$\sum_{i=1}^n x_i \mu_i + \Phi^{-1}(q) \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{K}_{\text{ov}} \mathbf{x}} \leq 0 \quad (1.6)$$

egyenlőtlenséggel. Itt a ξ_i , ($i=1, 2, \dots, n$) valószínűségi változók várható értékeit ($E_{xp}(\xi_i)$) jelölje $\mu_i = E_{xp}(\xi_i)$, továbbá \mathbf{K}_{ov} a $\boldsymbol{\xi}^T = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ valószínűségi változókhoz tartozó kovariancia mátrixot (elemei κ_{ij} -vel jelölve), q ($0 < q < 1$) egy előre adott valószínűségi érték, $\Phi^{-1}(q)$ ún. „probit” függvény, azaz a normális eloszlás kumulatív inverz eloszlásfüggvénye. A továbbiakban az erre a tételre alapuló átalakítást alkalmazzuk..

1.1.2 A sztohasztikus topológiaoptimalás matematikai programozási megfogalmazása bizonytalan erőnagyság esetén

Könnyen belátható, hogy (1.2.b) feltétel átírható $\mathbf{u}^T \mathbf{P} - C \leq 0$ alakba, hiszen $\mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \mathbf{P}$. Így a determinisztikus topológiaoptimalás feltételes szélsőérték feladata más megfogalmazásban a következő módon adható meg:

$$\tilde{W} = \sum_{g=1}^G \gamma_g A_g t_g^{\frac{1}{p}} = \min! \quad (1.7.a)$$

az alábbi feltételek mellett

$$\begin{cases} \mathbf{u}^T \mathbf{P} - C \leq 0; \\ -t_g + t_{\min} \leq 0; \quad (g = 1, \dots, G), \\ t_g - t_{\max} \leq 0; \quad (g = 1, \dots, G). \end{cases} \quad (1.7.b-d)$$

Tételezzük fel, hogy $\mathbf{P}^T = [P_1, P_2, \dots, P_n]$ tehervektor zérustól különböző elemei valószínűségi változóként adottak. Az erőmegadás adatai közül az erő nagyságát tekintjük valószínűségi változónak, amelyeket normális eloszlásúaknak tételezzük fel. A terhek várható értékét jelöljük $\bar{P}_i = E_{xp}(P_i)$ -vel, ($i=1, \dots, n$), míg a kovariancia mátrix \mathbf{K}_{ov} elemeit $\kappa_{i,j}$ -vel; ($i=1, \dots, n; j=1, \dots, n$). A $\bar{\mathbf{P}}^T = [\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n]$ terhelés hatására az $\bar{\mathbf{u}}^T = [\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n]$

csomóponti elmozdulásokat a $\mathbf{K}\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{P}}$ lineáris egyenletrendszerből kapjuk. A virtuális erők tételének alkalmazásával az u_i elmozdulás számítható, hiszen $u_i = \mathbf{u}^T \mathbf{K} \tilde{\mathbf{u}}_i$. Itt $\tilde{\mathbf{u}}_i$ az i -edik helyen lévő egységvektorból számított elmozdulás vektor. A kapott elmozdulások felhasználásával az $\mathbf{u}^T \mathbf{P} = u_1 P_1 + u_2 P_2 + \dots + u_n P_n$ külső potenciál „compliance” felírható, de (1.5) alkalmazásához ennek linearizálására van szükségünk. Ezt az alábbi módon tehetjük meg: bontsuk két részre a $\mathbf{P} = \bar{\mathbf{P}} + d\mathbf{P}$ valószínűségi változóként megadott tehervektort. Az elmozdulások és a terhek közötti lineáris kapcsolat miatt:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{P} \text{ és } \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{K}^{-1} \bar{\mathbf{P}}. \quad (1.8)$$

Mivel a \mathbf{K} merevségi mátrix szimmetrikus az $\mathbf{u}^T = \mathbf{P}^T \mathbf{K}^{-1}$ és az $\bar{\mathbf{u}}^T = \bar{\mathbf{P}}^T \mathbf{K}^{-1}$ elmozdulások számíthatók és a „sztohasztikus compliance” az alábbi módon írható fel:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{P} = \mathbf{P}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{P} = (\bar{\mathbf{P}} + d\mathbf{P})^T \mathbf{K}^{-1} (\bar{\mathbf{P}} + d\mathbf{P}) = \bar{\mathbf{P}}^T \mathbf{K}^{-1} \bar{\mathbf{P}} + 2\bar{\mathbf{P}}^T \mathbf{K}^{-1} (d\mathbf{P}) + (d\mathbf{P})^T \mathbf{K}^{-1} (d\mathbf{P}). \quad (1.9.a)$$

Elhagyva az utolsó, másodfokú tagot, a „sztohasztikus compliance” számítása az alábbi lineáris képlet alapján közelíthető:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{P} \sim \bar{\mathbf{P}}^T \mathbf{K}^{-1} \bar{\mathbf{P}} + 2\bar{\mathbf{P}}^T \mathbf{K}^{-1} (d\mathbf{P}) = \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{P}} + 2\bar{\mathbf{u}}^T (d\mathbf{P}) = 2\bar{\mathbf{u}}^T (\bar{\mathbf{P}} + d\mathbf{P}) - \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{P}}. \quad (1.9.b)$$

Tehát a „sztohasztikus compliance” egy lehetséges linearizált számított értéke:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{P} \sim 2\bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{P} - \bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{P}}. \quad (1.9.c)$$

Adott minimális q valószínűség, ($0 < q < 1$) és C „compliance” esetén az alábbi feltétel írható fel:

$$\text{Prob} \left(\left(2(\bar{u}_1 P_1 + \bar{u}_2 P_2 + \dots + \bar{u}_n P_n) - (\bar{u}_1 \bar{P}_1 + \bar{u}_2 \bar{P}_2 + \dots + \bar{u}_n \bar{P}_n) \right) - C \leq 0 \right) \geq q. \quad (1.9.d)$$

Bevezetve a P_{n+1} hiányváltozót $E_{xp}(P_{n+1}) = 1$ várható értékkel és zérus kovariancia értékekkel ($\kappa_{n+1,i} = 0; \kappa_{i,n+1} = 0; (i = 1, \dots, n+1)$), a (1.9.d) feltétel az alábbi módon írható:

$$\text{Prob} \left(2 \sum_{i=1}^{n+1} x_i P_i - \sum_{i=1}^n \bar{u}_i \bar{P}_i \leq 0 \right) \geq q; \quad (1.10.a)$$

itt $x_i = \bar{u}_i; (i = 1, \dots, n)$ és $x_{n+1} = -C/2$. A Prékopa által megadott (1.6) feltétel alapján (1.25.a) az alábbi konvex feltétellé átírható:

$$2 \sum_{i=1}^{n+1} x_i \bar{P}_i - \sum_{i=1}^n \bar{u}_i \bar{P}_i + 2\Phi^{-1}(q) \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{K}_{\text{ov}} \mathbf{x}} \leq 0; \quad (1.10.b)$$

itt $\Phi^{-1}(q)$ a un. „probit” függvény, \mathbf{K}_{ov} a hiányváltozóhoz kapcsolatos bővített kovariancia mátrix. Belátható, hogy (1.10.b) első része ekvivalens a determinisztikus „compliance” feltétellel:

$$2 \sum_{i=1}^{n+1} x_i \bar{f}_i - \sum_{i=1}^n \bar{u}_i \bar{f}_i = \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{u}} - C \quad (1.11)$$

Így valószínűségi változóként megadott terhelés esetén a bővített „compliance” feltétel az alábbi módon írható fel:

$$\bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{u}} - C + 2\Phi^{-1}(q) \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{K}_{ov} \mathbf{x}} \leq 0 \quad (1.12)$$

Ennélfogva a valószínűségi változóként megadott terhelés esetén a bővített topológiaoptimalás feladata az alábbi módon írható fel:

$$W = \sum_{g=1}^G \gamma_g A_g t_g^{\frac{1}{p}} = \min! \quad (1.13.a)$$

az alábbi feltételek mellett

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{u}} - C + 2\Phi^{-1}(q) \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{K}_{ov} \mathbf{x}} \leq 0; \\ -t_g + t_{\min} \leq 0; \quad (g = 1, \dots, G), \\ t_g - t_{\max} \leq 0; \quad (g = 1, \dots, G). \end{cases} \quad (1.13.b-d)$$

A kapott matematikai programozási feladat megoldása az (1.4) feladatnál ismertetett elvek alapján szintén iterációs algoritmus formájában történik. Matematikailag a (1.4) és (1.13) feltételes szélsőérték feladatok azonos tulajdonságúak, hiszen a (1.4.b) feltételt helyettesítő (1.13.b) feltétel konvex.

1.1.2.1 Az iterációs képlet számítása

Az előzőekben ismertetett elveket követve a sztohasztikus topológiaoptimalás feladata formailag az (1.4) matematikai programozási feladattal azonos. Megoldása az ott ismertetett elvek alapján történik, azaz az optimalitási feltételekből az iterációs formula levezethető. Ahogy a klasszikus optimalitási feltétel (COC) módszereknél ismert, a Lagrange-szorító kiszámítása előtt az ismeretlen vastagsági értékekre egy tartományt kell megadnunk, amely alapján a kapott vastagsági értékeket (\mathbf{A}) aktív, illetve (\mathbf{P}) passzív vastagsági értékek halmazába tudjuk sorolni.

Három eset lehetséges: ha $t_{\min} < t_g < t_{\max}$ (vagyis a g . alapelem “aktív”, $g \in \mathbf{A}$) akkor a t_g

vastagság számított értéke:
$$t_g = \left(\frac{\nu p (R_g + B_g)}{A_g \gamma_g} \right)^{\frac{p}{p+1}} \quad (1.14)$$

Itt az előzőekhez hasonlóan az $R_g = t_g^2 \sum_{e=1}^{E_s} \mathbf{u}_{ge}^T \tilde{\mathbf{K}}_{ge} \bar{\mathbf{u}}_{ge}$, ahol $\tilde{\mathbf{K}}_{ge}$ az egységnyi vastagságú elemekből ($t_g = 1$) számított ún. „normált” merevségi mátrix. Továbbá a korrelációs értékek

miatt egy további tagot eredményez a számítás:

$$B_g = t_g^2 \cdot \Phi^{-1}(q) \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\kappa_{ij}^2 \bar{u}_j \sum_{e=1}^{E_s} \bar{\mathbf{u}}_{ge}^T \tilde{\mathbf{K}}_{ge} \tilde{\mathbf{u}}_{gei} + \bar{u}_i \kappa_{ij}^2 \sum_{e=1}^{E_s} \bar{\mathbf{u}}_{ge}^T \tilde{\mathbf{K}}_{ge} \tilde{\mathbf{u}}_{gej} \right)}{\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{K}_{ov} \mathbf{x}}}.$$

A következő eset, ha $t_g = t_{\min}$. Ekkor a Kuhn-Tucker feltételekből a következő egyenlőtlenséget kapjuk

$$t_g \geq \left(\frac{\nu p (R_g + B_g)}{A_g \gamma_g} \right)^{\frac{p}{p+1}}. \quad (1.15)$$

Ez azt jelenti, ha a (1.15) alapján számolt t_g vastagság alsó korlátja kisebbre jönne ki mint t_{\min} , a (1.30) egyenlőtlenség a $t_g = t_{\min}$ esetén mindig teljesül. Végezetül hasonló módon járunk el a $t_g = t_{\max}$ esetén is. Itt a Kuhn-Tucker feltételekből a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$t_g \leq \left(\frac{\nu p (R_g + B_g)}{A_g \gamma_g} \right)^{\frac{p}{p+1}}. \quad (1.16)$$

Ez megengedi, hogy a $t_g = t_{\max}$ legyen, amikor a számolt t_g vastagság nagyobb min t_{\max} .

Ha $t_g = t_{\min}$ vagy $t_g = t_{\max}$, akkor a g -edik alapelemet "passzív"-nak nevezzük ($g \in P$).

A minimális illetve a maximális vastagsági érték megállapítása az előzőekhez azonos módon történik ($t_{\min} = 10^{-6}$).

Ha az (1.13.b) feltétel aktív, akkor az egyenlőtlenség egyenlőségként teljesül:

$$\bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{u}} - C + 2\Phi^{-1}(q) \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{K}_{ov} \mathbf{x}} = 0. \quad (1.17)$$

Mivel a g -edik alapelem „determinisztikus compliance” értéke az $R_g = t_g^2 \sum_{e=1}^{E_s} \bar{\mathbf{u}}_{ge}^T \tilde{\mathbf{K}}_{ge} \bar{\mathbf{u}}_{ge}$ alapján számítható, a teljes szerkezetre (aktív és passzív elemeket szétválasztva) a következő egyenletet írhatjuk fel.

$$C - 2\Phi^{-1}(q) \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{K}_{ov} \mathbf{x}} = \sum_{g \in P} \frac{R_g}{t_g} + \sum_{g \in A} \frac{R_g}{t_g}. \quad (1.18)$$

Ebbe behelyettesítve az aktív elemekre számított vastagsági értékeket

$$C - 2\Phi^{-1}(q) \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{K}_{ov} \mathbf{x}} = \sum_{g \in P} \frac{R_g}{t_g} + \sum_{g \in A} \frac{R_g}{\left(\frac{\nu p (R_g + B_g)}{A_g \gamma_g} \right)^{\frac{p}{p+1}}}. \quad (1.19)$$

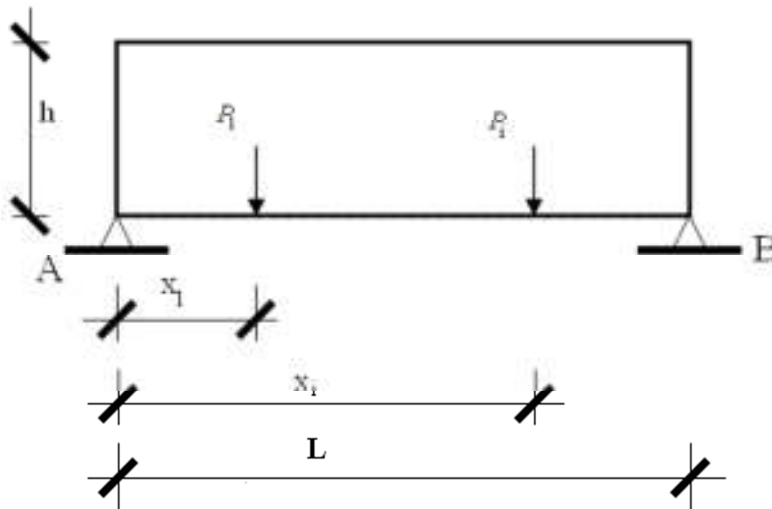
az iterációs lépést szabályzó ν Lagrange szorzó számítható. Értéke

$$\nu = \frac{\left(\frac{\sum_{g \in A} \left(\frac{A_g \gamma_g}{p(R_g + B_g)} \right)^{\frac{p}{p+1}} R_g}{C - 2\Phi^{-1}(q)\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{K}_{ov} \mathbf{x}} - \sum_{g \in P} \frac{R_g}{t_g}} \right)^{\frac{p+1}{p}}}{\quad} \quad (1.20)$$

Ezekután az (1.13) feladat iterációs módszerre alapuló megoldási algoritmus az előzőekhez hasonlóan történik

1.1.3 A sztohasztikus topológiaoptimalás matematikai programozási feladatként való megfogalmazása bizonytalan erőtámadáspont esetén

Legyen a topológia-optimalás tárgya az 1.3 ábrán látható szerkezet (adott tervezési tartomány, erő és elmozdulási peremfeltételek).



1.3. ábra. Tervezési tartomány és peremfeltételek

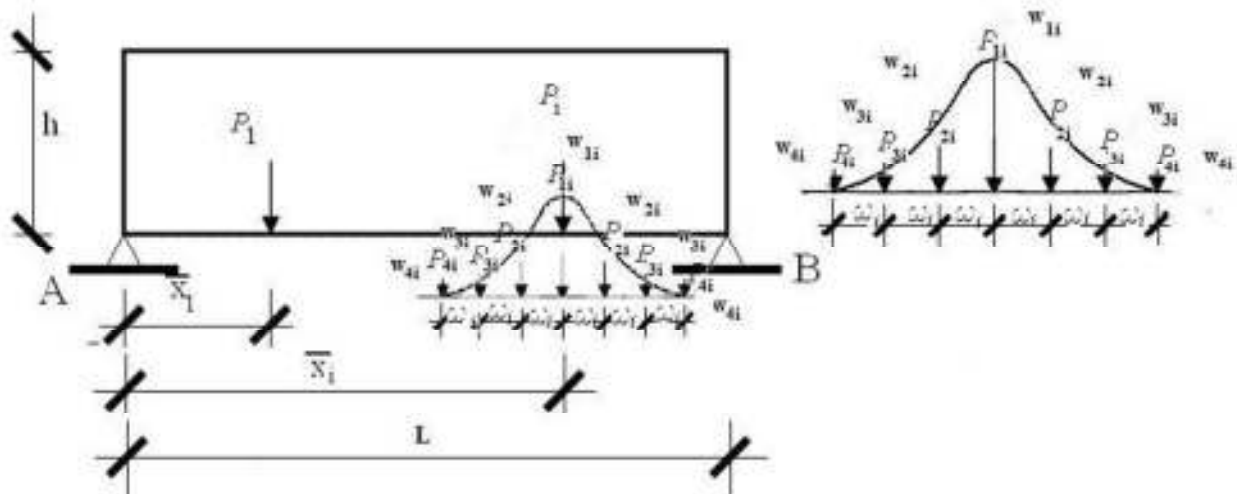
A szerkezet anyaga lineárisan rugalmas és izotróp. A terhelést leíró adatok közül a nagyság és irány determinisztikusan, míg a terhek támadáspontja sztohasztikusan adott. Itt csak azzal az esettel foglalkozunk, ahol a támadásponti bizonytalanságok miatt a végső szerkezeti kialakítás olyan lesz, hogy akár egy másodlagos teherátadó szerkezet beiktatásával is, de az erő mindig tud érintkezni az optimális szerkezettel (a teherátadás mindig lehetséges). Jelöljük $\mathbf{P}^T = [P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n]$ -vel a tehervektort, ahol az ismert hatásvonalú erőkomponenst P_i , ($i=1, \dots, n$) jelöli. Ennek az erőnek (az i -edik erő) a támadáspontját x_i , ($i=1, \dots, n$) valószínűségi változóval adjuk meg (1.3 ábra), melynek ismertnek tételezzük fel az eloszlás

típusát -az egyszerűség kedvéért legyen normális eloszlású-. Továbbá az \bar{x}_i , ($i=1, \dots, n$) jelenti ennek a távolságnak a várható értékét, míg ω_i , ($i=1, \dots, n$) a szórását. Egy egyszerű számítással (vagy adat formájában ismert) meghatározhatjuk azt, hogy a ható terhek milyen valószínűséggel kerülnek egy adott pozícióba. Annak következtében, hogy a terhek támadáspontjai sztochasztikusak a belőlük számolt „compliance” érték is valószínűségi változóként kezelendő és nem számítható könnyen. Így a topológiaoptimalás bonyolultabb, mint determinisztikus esetben volt.

Ahogy az előzőekben is megadtuk a „compliance” –a most használt alakja a külső potenciális energia- az alábbiak szerint számítható „formálisan”:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{P} = u_1 P_1 + u_2 P_2 + \dots + u_n P_n. \quad (1.21)$$

Itt (u_i , $i=1, \dots, n$) elmozdulás értékek a $\mathbf{Ku} = \mathbf{P}$ lineáris egyenletrendszerből kapott elmozdulás komponens értékek a P_i , ($i=1, \dots, n$) erőkomponenseknek megfelelő irányban. A kapott energia érték természetesen probabilisztikus és a továbbiakra tételezzük fel, hogy normális eloszlású.



1.4. ábra. Helyettesítő szerkezet tervezési tartománya és peremfeltételei

Alkalmazva a klasszikus topológiaoptimalás alapfeladatában használt „compliance” feltételre vonatkozó korlát sztochasztikus esetre történő kiterjesztését, az új típusú tervezési feltétel az alábbiak szerint adhatjuk meg:

$$\text{Prob}(\mathbf{u}^T \mathbf{P} - C \leq 0) \geq q. \quad (1.22)$$

Itt $0 < q < 1$ az un. elvárt tervezési biztonsági értéket jelenti és a gyakorlati tervezésben használatos szerkezeti összeomlási valószínűséggel kapcsolatos (EUROCODE 1990, 1991). Ennek részleteire itt nem térünk ki.

Követve a Prékopa-féle felső-korlátra vonatkozó megfogalmazást a (1.22) feltétel a következő

konvex kifejezéssel helyettesítő:

$$\sum_{i=1}^n P_i \bar{u}_i - C + \Phi^{-1}(q) \sqrt{\mathbf{b}^T \mathbf{K}_{ov} \mathbf{b}} \leq 0. \quad (1.23)$$

Itt $\bar{u}_i = E_{xp}(u_i)$, ($i = 1, \dots, n$) az u_i , ($i = 1, \dots, n$) elmozdulás értékek várható értékét jelöli a sztochasztikusan megadott P_i , ($i = 1, \dots, n$) erők alatt és irányában, míg \mathbf{K}_{ov} ezen elmozdulások kovariancia értékeiből számított kovariancia mátrix. A $\mathbf{b}^T = [P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n]$ vektort a ható erőkből állítjuk össze. Az $\bar{u}_i = E_{xp}(u_i)$, ($i = 1, \dots, n$) várható elmozdulásértékek és a hozzájuk kapcsolatos $\kappa_{i,j}$, ($i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, n$) kovariancia értékek a \mathbf{K}_{ov} kovariancia mátrixban a későbbiekben ismertetett egyszerű parametrikus vizsgálattal vehetők számításba. Így a klasszikus topológiaoptimalás bizonytalan támadáspontú terhelésre kiterjesztett optimalási feladata a következő formában adható meg (Lógó 2012):

$$W = \sum_{g=1}^G \gamma_g A_g t_g^p = \min! \quad (1.24.a)$$

az alábbi feltételek mellett

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n P_i \bar{u}_i - C + \Phi^{-1}(q) \sqrt{\mathbf{b}^T \mathbf{K}_{ov} \mathbf{b}} \leq 0; \\ -t_g + t_{\min} \leq 0; \quad (\text{for } g = 1, \dots, G), \\ t_g - t_{\max} \leq 0; \quad (\text{for } g = 1, \dots, G). \end{cases} \quad (1.24.b)$$

Az ilyen típusú mechanikai modell a előzőekben részletezett iterációs eljáráshoz hasonlóan megoldható. A feltételi egyenletek további feltételekkel bővíthetők (stabilitási, feszültségi korlát), de ez nem témája ennek a dolgozatnak.

1.1.3.1 Egyszerűsített parametrikus eljárásra alapuló topológiaoptimalás bizonytalan támadáspontú erők esetén

A következőekben bemutatott mechanikai modellt akkor alkalmazhatjuk, ha a bizonytalan támadáspontokban az adott erők előfordulásainak valószínűsége adott. Tekintsük a 1.3 ábrán megadott optimalis tervezési feladatot. Mivel az egyes terhek támadáspontja nem ismert determinisztikusan, egy mechanikailag ekvivalens erőrendszer hozható létre a P_i erő támadáspontjának előre ismert \bar{x}_i várható értéke, mint szerkezeti pont környezetében a parametrikus vizsgálat elvégzéséhez. Felhasználva, hogy ismerjük a támadáspontok eloszlásának típusait –most normális eloszlás-, várható értékét és szórását egy P_{ij} , ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, \dots, k$) helyettesítő erőrendszer állítható elő az eredetileg adott P_i erő

helyett annak ismert \bar{x}_i várható értékű támadáspontja körül –mint bázispont körül- az ismert nagysággal és irányítással. Jelen esetben ez az egyszerűség kedvéért szimmetrikus elrendezést és hét erőt jelenet a 4.4 ábrának megfelelően a $(P_{i1}, P_{i2}, P_{i3}, P_{i4})$ erőkből komponálva.

Ezen erők a csoporton belül és kívül is függetlenek és mindegyikhez egy előre megadott w_{ij} , ($j = 1, \dots, k = 7$) valószínűségi érték tartozik (ez lehet a gyakorlatban egy tervezési adat). Ennek megfelelően a terheléshez ez a kiegészítő adat tartozik, vagy az előtervezésből számítandó. Tehát a tervezés i -edik terhelésre vonatkozó adata ezzel a paraméterkettőzéssel - w_{ij} , ($j = 1, \dots, k = 7$), $(P_{i1}, P_{i2}, P_{i3}, P_{i4})$ -lesz teljes, természetesen figyelembe vesszük ezen erők függetlenségét is. Ennek megfelelően az optimális tervezés helyettesítő kiindulási feladata a 1.4 ábrának megfelelő elrendezésű. Az így létrehozott helyettesítő feladat már determinisztikusan megadott feladatok sorozatára bontható a terhelés és elmozdulás számítás szempontjából. Alkalmazva a P_{ij} ($i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, k$) független erőket, mint terhelési eseteket, az i -edik teherből számított \mathbf{u}_{ij} , ($j = 1, \dots, k$) elmozdulás vektora a szerkezetnek a $\mathbf{K}\mathbf{u}_{ij} = \mathbf{P}_{ij}$ lineáris egyenletrendszerből számítható. Mivel az elsőrendű elméletet alkalmazzuk és az anyag lineárisan rugalmas, az elmozdulások szuperponálhatósága és a reciprocitási tételek (Szabó, Roller (1971)) alkalmazhatók. Felhasználva ezen \mathbf{u}_{ij} , ($j = 1, \dots, k$) elmozdulás vektorokat és a kapcsolódó tehergyakorisági w_{ij} ($i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, k$) valószínűségeket az i -edik terheléshez kapcsolódó \mathbf{u}_i elmozdulás $\bar{\mathbf{u}}_i$ várható értéke és annak $D^2(\bar{\mathbf{u}}_i)$ szórásnégyzete az alábbi összefüggésekből számíthatóak:

$$\bar{\mathbf{u}}_i = \sum_{j=1}^k \mathbf{u}_{ij} w_{ij}; \quad (1.25.a)$$

$$D_i^2(\bar{\mathbf{u}}_i) = \sum_{j=1}^k (\mathbf{u}_{ij})^2 w_{ij} - \bar{\mathbf{u}}_i^2. \quad (1.25.b)$$

Ezek az egyszerűsített parametrikus vizsgálat alapján számított értékek képezik a (1.24) feltételes szélsőérték feladatként megadott mechanikai modell egyes elemeit. Mivel az egyes terhek függetlenek, a \mathbf{K}_{ov} kovariancia mátrix csak a fődiagonálisban tartalmaz a zérustól különböző értékeket:

$$\mathbf{K}_{ov} = \langle D_1^2(\bar{\mathbf{u}}_1), D_2^2(\bar{\mathbf{u}}_2), \dots, D_n^2(\bar{\mathbf{u}}_n) \rangle \quad (1.26)$$

Felhasználva, hogy a külső potenciális energia -a „compliance”- értéke az alakváltozási energiának a kétszerese, a (1.24) topológiaoptimalizációs feladat átírható az alakváltozási energia

korlátozásával megadott általánosított optimális tervezési feladattá felhasználva a Prékopátételt:

$$W = \sum_{g=1}^G \gamma_g A_g t_g^{\frac{1}{p}} = \min! \quad (1.27.a)$$

$$\text{az alábbi feltételek mellett} \begin{cases} \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{u}}_i^T \mathbf{K} \mathbf{u}_i - C + \Phi^{-1}(q) \sqrt{\mathbf{b}^T \mathbf{K}_{ov} \mathbf{b}} \leq 0; \\ -t_g + t_{\min} \leq 0; \quad (\text{for } g = 1, \dots, G), \\ t_g - t_{\max} \leq 0; \quad (\text{for } g = 1, \dots, G). \end{cases} \quad (1.27.b-d)$$

Matematikailag ez a modell és a korábban bemutatott 1.4 topológioptimálási modellel hasonló, valamennyi konvexitási, deriválhatósági kijelentés -Rozvany (1997), Lógó (2007d)-érvényes. A célfüggvényben -a szerkezet súlya- alkalmazott p „büntető” paraméter alkalmazása az ismeretlen t_g „ground” elemvastagságok jobb mérnöki számításba vételét (van anyag-nincs anyag) teszi lehetővé. Megjegyezzük, ezzel a módszerrel a megoldás unicitása elvész, de a módszer igen széleskörűen alkalmazott a mérnöki gyakorlatban az élet minden területén.

A (1.27) feltételes szélsőérték feladat az előző alfejezetben ismertett iterációs eljáráshoz (módosított SIMP algoritmus) hasonlóan megoldható. Az iterációs képlet a feltételes szélsőérték feladat elsőrendű optimalitási feltételeiből származtatható. Itt ennek fő lépéseit ismertetjük. A (1.27)-ből származtatott Lagrange-függvény alapelem t_g vastagsága szerinti parciális deriváltja a következő egyenlettel fejezhető ki:

$$\frac{1}{p} \gamma_g A_g t_g^{\frac{1-p}{p}} + \nu \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathbf{u}_i^T}{\partial t_g} \mathbf{K} \bar{\mathbf{u}}_i + \mathbf{u}_i^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t_g} \bar{\mathbf{u}}_i + \mathbf{u}_i^T \mathbf{K} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_i}{\partial t_g} \right) + \Phi^{-1}(q) \frac{\partial \left(\sqrt{\mathbf{b}^T \mathbf{K}_{ov} \mathbf{b}} \right)}{\partial t_g} \right) - \alpha_g + \beta_g = 0, \quad (g = 1, \dots, G). \quad (1.28.a)$$

A $\frac{\partial \left(\sqrt{\mathbf{b}^T \mathbf{K}_{ov} \mathbf{b}} \right)}{\partial t_g}$ kifejezést részletezve és átírva, azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial \left(\sqrt{\mathbf{b}^T \mathbf{K}_{ov} \mathbf{b}} \right)}{\partial t_g} = - \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{e=1}^{E_s} \left(\sum_{j=1}^k \left(\mathbf{u}_{ije}^T \tilde{\mathbf{K}}_e \mathbf{u}_{ie} \right)^2 w_j \right) - \left(\mathbf{u}_{ie}^T \tilde{\mathbf{K}}_e \bar{\mathbf{u}}_{ie} \right)^2}{\sqrt{\mathbf{b}^T \mathbf{K}_{ov} \mathbf{b}}} = - \frac{VAR_g}{VAR_s}. \quad (1.28.b)$$

Itt VAR_g jelenti a g -edik alapelemhez tartozó compliance” értéket, míg VAR_s a teljes

szerkezet „compliance” értékét szimbolizálja, az \mathbf{u}_{ije} a P_{ij} ($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, k$)-ből számított elmozdulásokat adja az e-dik elemen. Vezessük be az

$$R_g = t_g^2 \sum_{e=1}^{E_g} \mathbf{u}_{ge}^T \tilde{\mathbf{K}}_{ge} \bar{\mathbf{u}}_{ge} \quad \text{és} \quad B_g = t_g^2 \Phi^{-1}(q) \frac{VAR_g}{VAR_s} \quad (1.28.c)$$

kifejezéseket. Ekkor a (1.28) egyenletek átírhatók egy egyszerűbb formába:

$$\frac{1}{p} \gamma_g A_g t_g^{\frac{1-p}{p}} - \nu \frac{R_g + B_g}{t_g^2} - \alpha_g + \beta_g = 0; \quad (g = 1, \dots, G). \quad (1.28.d)$$

Annak következtében, hogy a (1.28.d) optimalitási feltételt az előzőekben bemutatott (1.4) klasszikus topológiaoptimalizálási feladatot $\Phi^{-1}(q) \sqrt{\mathbf{b}^T \mathbf{K}_{ov} \mathbf{b}}$ kifejezéssel bővített feltételes szélsőérték feladatából származtattuk, a regularitási feltételek azonosak az eredeti (1.4) topológiaoptimalizálási feladathoz tartozó regularitási feltételekkel.

Ahogy ismert az optimalitási feltételek módszereiben, két halmazt kell definiálnunk az ismeretlen elemvastagságok tekintetében (A) aktív, illetve (P) passzív elemvastagságok halmazai (Berke, Khot (1974))-.

Amennyiben $t_{\min} < t_g < t_{\max}$ (vagy szavakkal kifejezve, ha egy „ground” elem vastagság az aktív halmazhoz tartozik - $g \in A$ -) a (1.28.d) feltételből az ezen „ground” elem vastagsága a következő formula alapján számítható:

$$t_g = \left(\frac{\nu p (R_g + B_g)}{A_g \gamma_g} \right)^{\frac{p}{p+1}}. \quad (1.29)$$

Az összes többi esetben a $t_g = t_{\min}$ vagy a $t_g = t_{\max}$ vastagságra vonatkozó előírást kell alkalmazni és mindkét esetben az aktuális g „ground” elem az un. „passzív” elemek halmazába tartozik - $g \in P$ -.

A numerikus számítás során praktikus okból –elkerülendő a szerkezet merevségi mátrixának rosszul kondicionált volta- a minimális elemvastagságot általában egy nagyon kicsi értékre állítjuk be (pl. $t_{\min} = 10^{-6}$), míg a maximális vastagság a megszokott egységnyi értéket jelenti.

Amennyiben a (1.27) topológiaoptimalizálási feladatban a (1.27.b) „compliance” feltétel aktív, akkor az egyenlőség formájában teljesül. Azaz

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{u}}_i + \Phi^{-1}(q) VAR_s - C = 0. \quad (1.30)$$

Ebben az egyenletben a g -edik „ground” elem „compliance” értékét az $R_g = t_g^2 \sum_{e=1}^{E_s} \bar{\mathbf{u}}_{ge}^T \tilde{\mathbf{K}}_{ge} \bar{\mathbf{u}}_{ge}$

és $\Phi^{-1}(q)VAR_s = \Phi^{-1}(q) \sqrt{\left(\sum_{g=1}^G t_g^2 \sum_{e=1}^{E_s} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (\mathbf{u}_{ij}^T \tilde{\mathbf{K}}_e \mathbf{u}_i)^2 w_{ij} - (\mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{K}}_e \bar{\mathbf{u}}_i)^2 \right)}$ kifejezések összegeként

tudjuk számítani. A teljes szerkezet esetében ezeket kell összegezni, ahol az un. „aktív” alapelemek esetében a (1.29) alapján számított vastagságot, míg az un. „passzív” alapelemeknél csak az egységnyi vastagságúakat vesszük figyelembe. Így a (1.30) egyenlet a következő alakba írható:

$$C - \Phi^{-1}(q) \sqrt{\mathbf{b}^T \mathbf{K}_{ov} \mathbf{b}} = \sum_{g \in P} \frac{R_g}{t_g} + \sum_{g \in A} \frac{R_g}{t_g}. \quad (1.31)$$

Behelyettesítve az „aktív” alapelemek vastagságát megadó (1.29) összefüggést a (1.31) egyenlet a következő alakban írható fel:

$$C - \sum_{g \in P} R_g - \Phi^{-1}(q) \sqrt{\left(\sum_{g \in P} t_g^2 \sum_{e=1}^{E_s} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (\mathbf{u}_{ij}^T \tilde{\mathbf{K}}_e \mathbf{u}_i)^2 w_j - (\mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{K}}_e \bar{\mathbf{u}}_i)^2 \right)} =$$

$$\frac{\sum_{g \in A} R_g + \Phi^{-1}(q) \sqrt{\left(\sum_{g \in A} t_g^2 \sum_{e=1}^{E_s} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (\mathbf{u}_{ij}^T \tilde{\mathbf{K}}_e \mathbf{u}_i)^2 w_j - (\mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{K}}_e \bar{\mathbf{u}}_i)^2 \right)}}{\left(\frac{\nu p (R_g + B_g)}{A_g \gamma_g} \right)^{\frac{p}{p+1}}} = \frac{\sum_{g \in A} (R_g + GVAR)}{\left(\frac{\nu p (R_g + B_g)}{A_g \gamma_g} \right)^{\frac{p}{p+1}}}. \quad (1.32)$$

Ebből az ismeretlen ν Lagrange-szorzó meghatározható:

$$\nu = \frac{\left(\sum_{g \in A} \left(\frac{A_g \gamma_g}{p (R_g + B_g)} \right)^{\frac{p}{p+1}} (R_g + GVAR) \right)^{\frac{p+1}{p}}}{C - \sum_{g \in P} \left(\frac{R_g}{t_g} + \Phi^{-1}(q) \sqrt{\mathbf{b}^T \mathbf{K}_{ov} \mathbf{b}} \right)}, \quad (\text{for } A \neq 0). \quad (1.33)$$

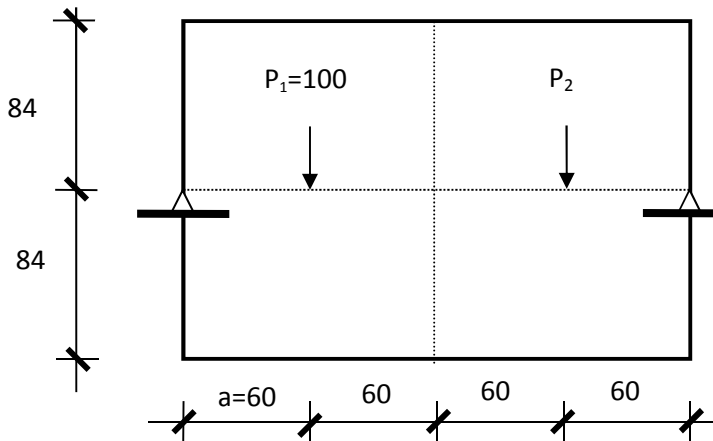
Ezek után az (1.27) topológiaoptimalási feladat iterációs módszerrel történő megoldási algoritmus az előzőekhez hasonlóan történik.

1.1.4 Téglalap alakú tervezési tartomány két koncentrált erővel

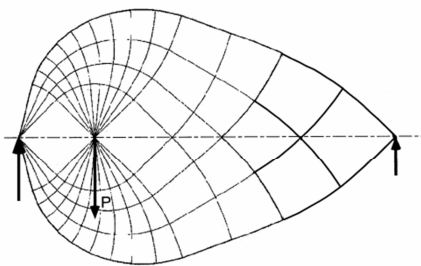
A topológiaoptimalási feladatok közül az egyik leggyakrabban vizsgált feladat a téglalap alakú tervezési tartomány, két megtámasztás és két koncentrált erő alkalmazása esetén (1.5. ábra.). A szokásos méretarány (magasság/oldalhossz) a 0.5, de ez nem minden esetben elegendő, mivel nem elegendő arány esetén az aktív zóna meghaladná a felső és az alsó él által határolt magasságot. Ennek elkerülése érdekében itt az arány 0.7. A támaszok a bal és jobb oldali él közepén találhatók.

1.1.4.1 Aszimmetrikus nagyságú, de szimmetrikus helyzetű koncentrált erők esete

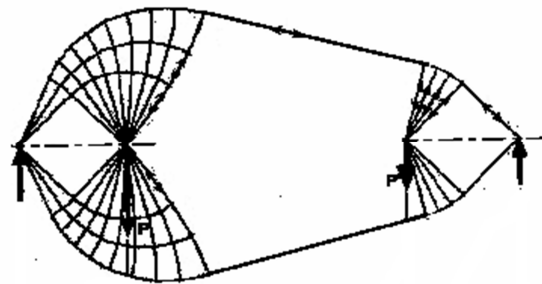
A dimenzió nélküli tervezési tartomány nagysága 168x240 egység (1.5 ábra), amit a végeleemes diszkretizálás során 84x120 alapelemre és minden alapelemet még 2x2 elemre bontottunk.



1.5 ábra. Téglalap alakú tervezési tartomány



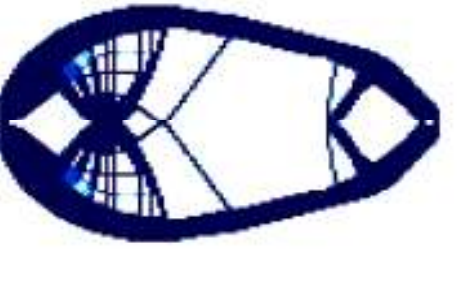
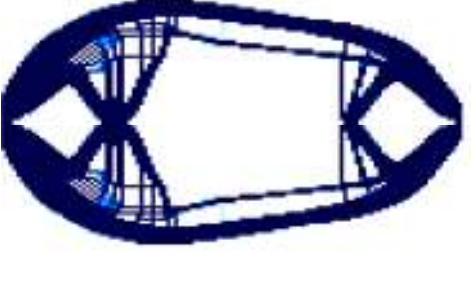
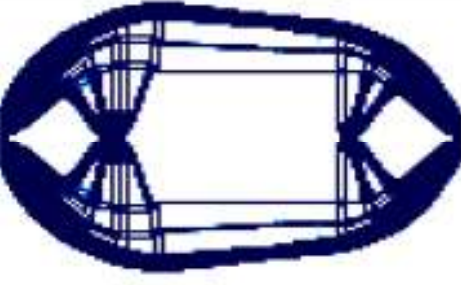

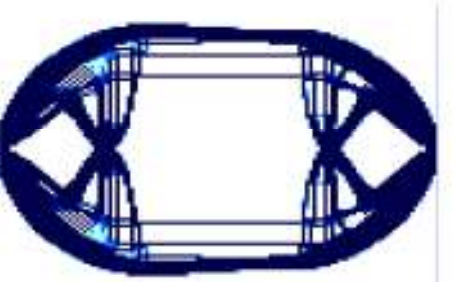
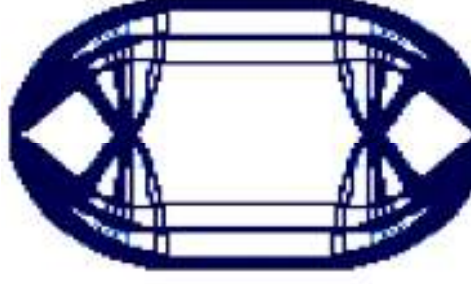
1.6. ábra. Chan-féle analitikus megoldás



1.7. ábra. Melchers-féle analitikus megoldás

1.1. Táblázat Optimális topológiák változó nagyságú P_2 erő esetén

P_2	Optimális topológia	P_2	Optimális topológia
0.01P 1		0.10P 1	

<p>0.30 P_1</p>		<p>0.50P 1</p>	
<p>0.70 P_1</p>		<p>0.80 P_1</p>	
<p>0.90 P_1</p>		<p>1.00 P_1</p>	

(A végelemek száma 40320 a feladatban.) A Poisson-tényező 0. A csuklós megtámasztások a bal, illetve a jobb oldali él közepén található. Az P_1 baloldali koncentrált erőteher 100 egység nagyságú és a tartomány középvonalának egy negyedében van a támadáspontja. Az aszimmetriát a középvonal három negyedében (azaz szimmetrikusan) elhelyezkedő P_2 koncentrált erő változó nagysága okozza. Az P_2 erő praktikusán egy elhanyagolható mértéktől ($P_2=0.01 P_1=1$ egység) az $P_2=P_1=100$ egység nagyságig változik. A p büntetőparaméter értékét itt is dinamikusan változtattuk, a kiindulási érték $p=1$. A p paraméter értéke $p=1.5$ -ig $\Delta=0.1$ lépésközzel növeltük, majd $p=2.5$ -ig (ami a végső érték volt) már $\Delta=0.25$ volt a növekmény.

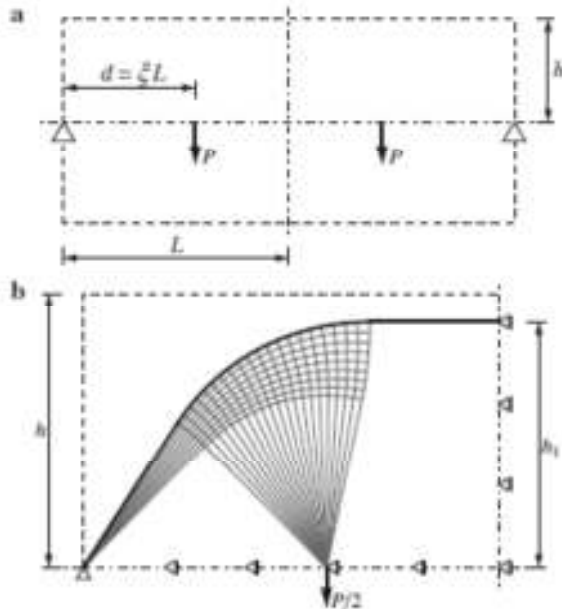
Az analitikus megoldást zérus térfogati arány esetén először Chan (1963,1964) mutatta be $P_2=0$ esetén ((1.6.a ábra), amit Melchers (2005) később szintén megadott (1.7. ábra).

Az 1.1 táblázat tartalmazza a különböző erőnagyságok esetére kiszámolt optimális topológiák ábrát.

Megállapítható, hogy a numerikus, illetve az analitikus megoldások jellegükben egyezőséget mutatnak.

1.1.4.2 Szimmetrikus nagyságú, szimmetrikus helyzetű koncentrált erők esete

Analitikus és numerikus megoldások



1.8 ábra Kiinduló „egy negyedre redukált” feladat

Kutatásainkban az optimális topológiákat az alábbi típusú esetekre határoztuk meg:

- Topology 1: $h \geq h_1$,
- Topology 2: $h_1 \geq h \geq d/\sqrt{2}$,
- Topology 3: $h \leq d/\sqrt{2}$.

Itt az eredményeket a 2 és 3-s típusú esetekre adjuk meg.

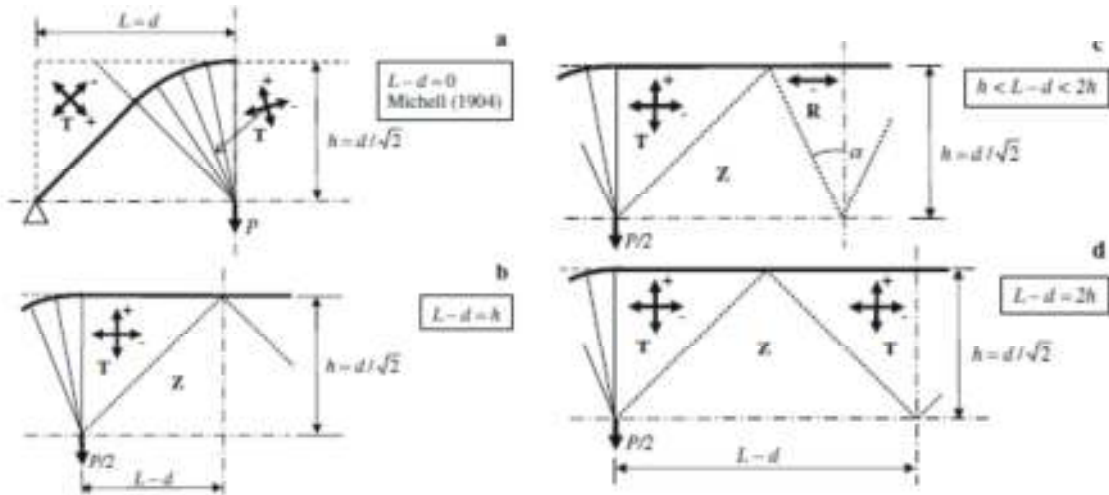
Itt a következő régiókat különböztetjük meg:

T régió: húzott, nyomott elemek $\bar{\varepsilon}_1 = -\bar{\varepsilon}_2 = k$

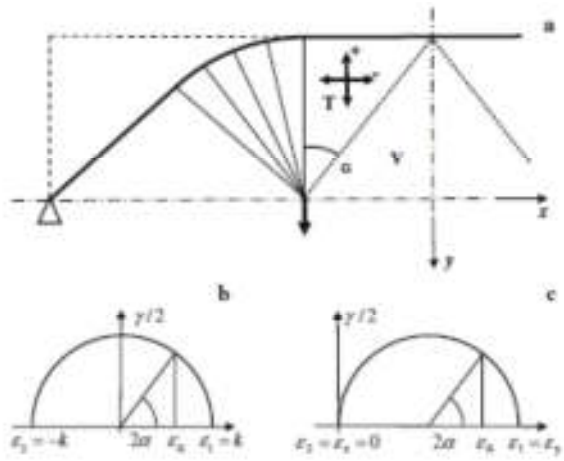
S régió: minden irányban ugyan olyan előjelű elemek $\bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon}_2 = k$

R régió: tetszőleges pontban csak egy elem $|\bar{\varepsilon}_1| = k$ és $|\bar{\varepsilon}_2| \leq k$

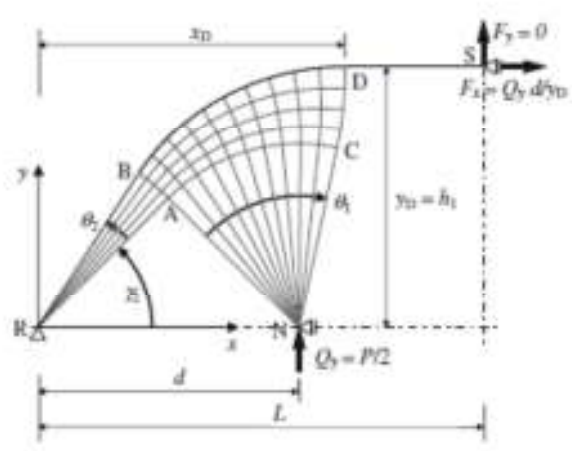
O régió: nincsenek elemek $|\bar{\varepsilon}_1| \leq k$ és $|\bar{\varepsilon}_2| \leq k$



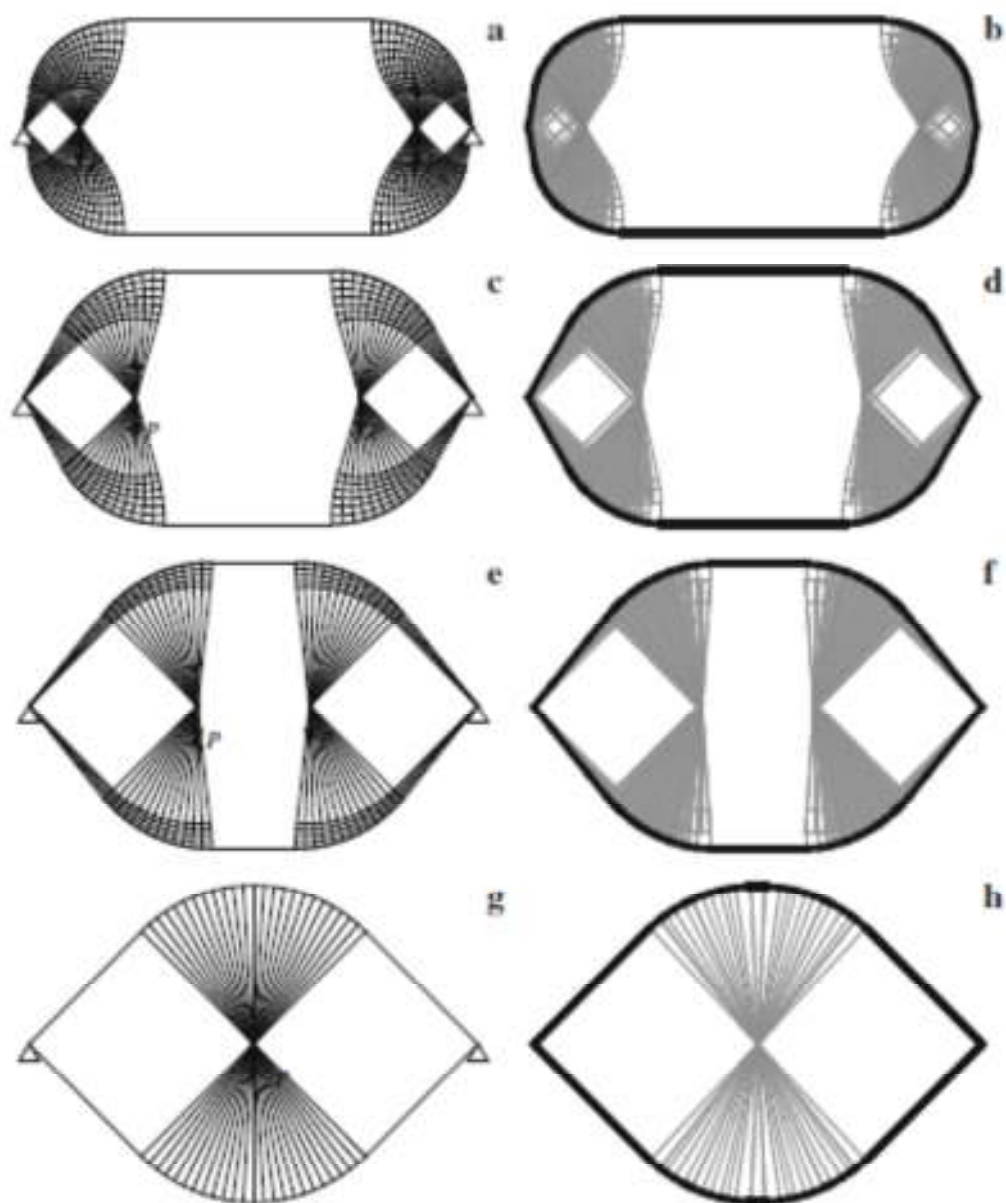
1.9 ábra: 2-s és 3-s típusú topológiák



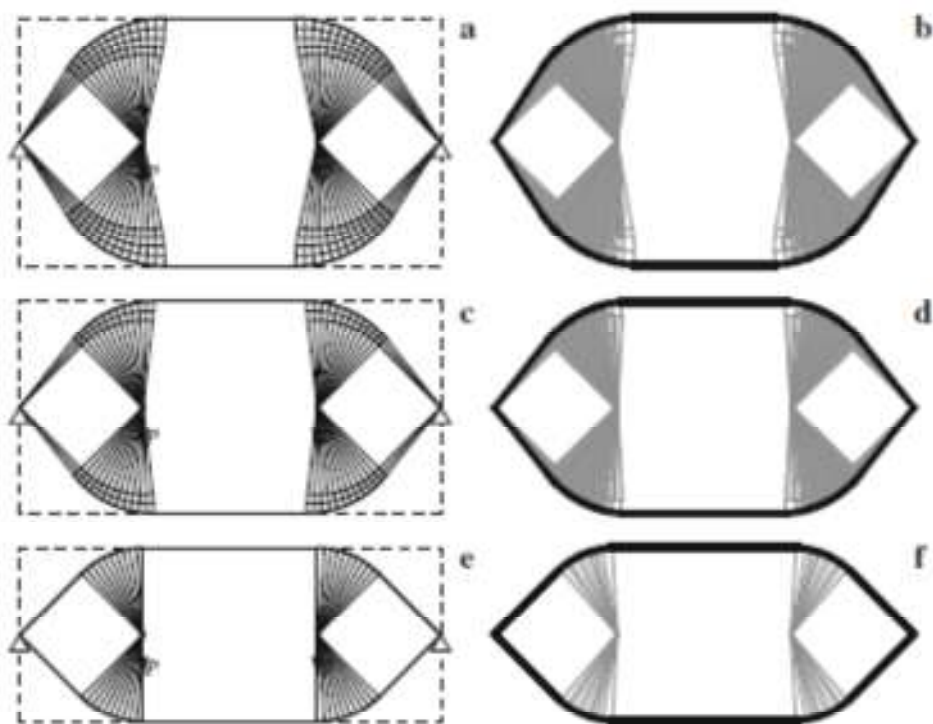
1.10 ábra Optimális „adjoint” alakváltozási mező 2-s és 3-s esetekben
 ha $0 < L - d < h$



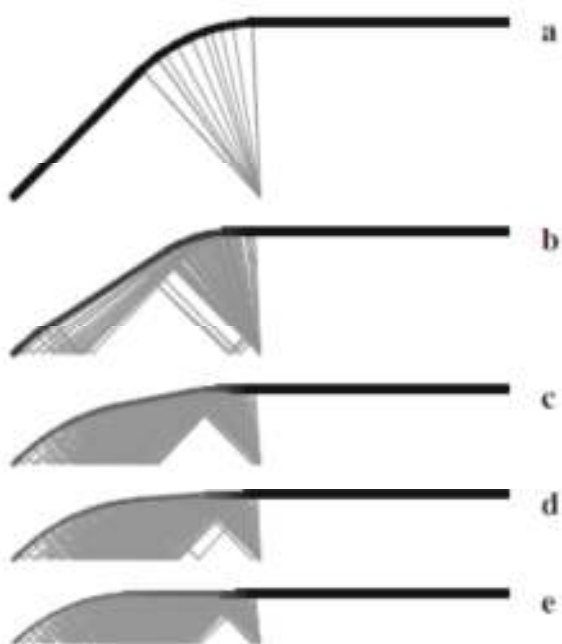
1.11 ábra Optimális „layout” 1-s és 2-s esetekben (bal felső negyed kirajzolva)



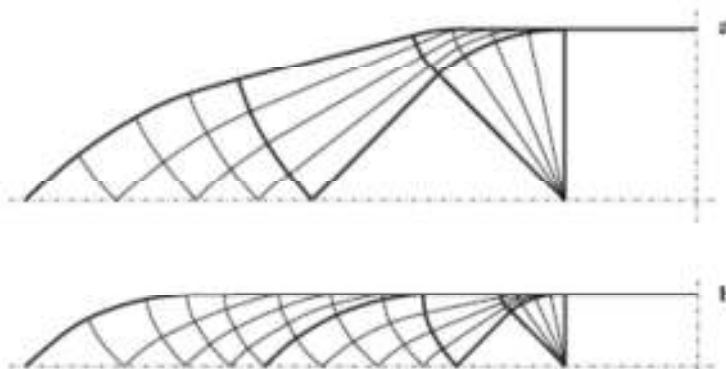
1.12 ábra Optimális „layout” 1-s esetben változó támadáspont esetén



1.13 ábra Optimális „layout” 1-s esetben változó magasság esetén analitikusan és numerikusan



1.14 ábra Numerikusan kapott optimális topológiák



1.15 ábra Numerikusan kapott optimális topológiák 3-s eset

1.2 Táblázat: Az analitikusan és numerikusan számított topológiák összehasonlítása

Problem	Grid density	Number of potential members	Numerical volume $[PL/\sigma_p]$	Exact volume $[PL/\sigma_p]$	Relative error [%]
Figure 5a,b	160 x 82	54 281 782	2.51607	2.51353	0.10
Figure 5c,d	160 x 90	65 257 558	3.67977	3.67773	0.06
Figure 5e,f	160 x 103	85 220 613	4.50088	4.49910	0.04
Figure 5g,h	160 x 113	102 408 109	5.14307	5.14159	0.03
Figure 6a,b	169 x 100	89 608 157	3.98804	3.98632	0.04
Figure 6c,d	169 x 85	64 983 850	4.02699	4.02534	0.04
Figure 6e,f	169 x 70	44 280 137	4.18500	4.18345	0.04

1.1.4.3 A legkisebb térfogatú rácsos tartó pontos megoldása szimmetrikus nagyságú, szimmetrikus helyzetű koncentrált erők esetén húzásra és nyomásra eltérő határfeszültség esetén

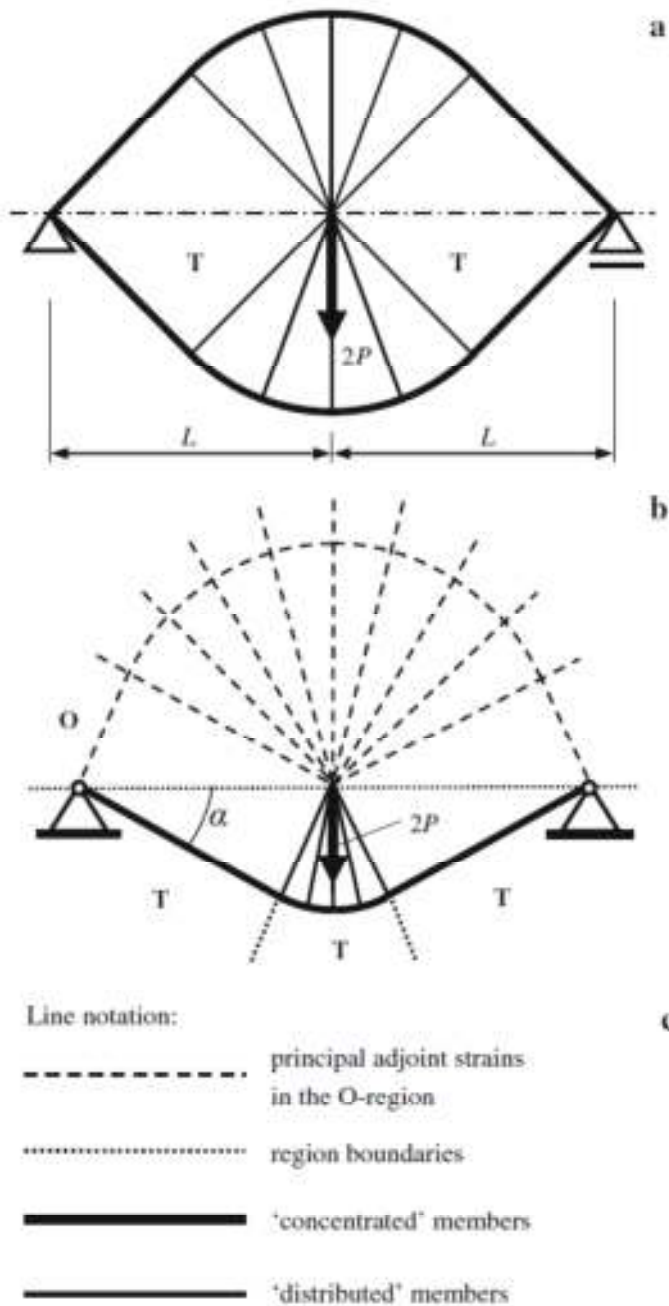
Jelöljük az „adjoint” elmozdulás mező értékét megegyező határfeszültség σ_p esetén a következőképpen:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= (1/\sigma_p) \operatorname{sgn} F \quad (\text{for } F \neq 0), \\ |\bar{\varepsilon}| &\leq 1/\sigma_p \quad (\text{for } F = 0), \end{aligned}$$

ami eltérő húzó és nyomófeszültség esetén az alábbi módosításokkal használjuk.

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= -1/\sigma_C && (\text{for } F < 0), \\ \bar{\varepsilon} &= 1/\sigma_T && (\text{for } F > 0), \\ -1/\sigma_C &\leq \bar{\varepsilon} \leq 1/\sigma_T && (\text{for } F = 0), \end{aligned}$$

itt σ_c a nyomási míg σ_T a húzási határ.

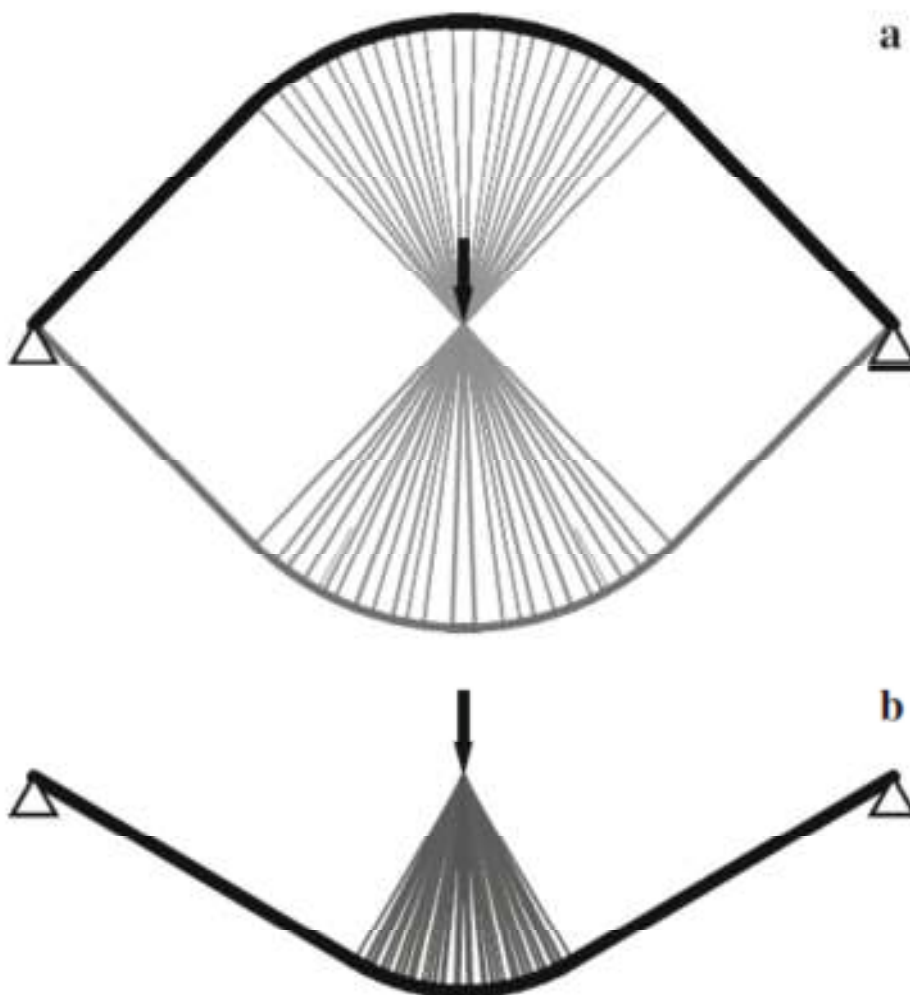


1.16 ábra Analitikusan számított optimális megoldások egy teherre különböző megtámasztások esetén.

Az analitikusan számolt optimális értékek:

$$V_{\text{pin-roller}} = 10.286269 PL/\sigma_T,$$

$$V_{\text{pin-pin}} = 7.6538106 PL/\sigma_T.$$



1.17 ábra Numerikusan számított optimális megoldások egy teherre különböző megtámasztások esetén.