

A K81166 projekt záró beszámolója

A projekt során elsősorban operátorstruktúrák transzformációival, azok szerkezetének kérdéseivel foglalkoztunk. A vizsgálatok egyik fő közös jellemzője az volt, hogy a klasszikus lineáris-algebrai esettől eltérően az általunk tekintett struktúrák és transzformációik nemlineárisak voltak. Ezt a sok esetben nagyfokú nehézséget új módszerek kidolgozásával sikerült eredményesen áthidalni.

A 4 éves kutatás összegzéseként elmondható, hogy vizsgálataink között talán a legeredményesebb terület annak a kérdésnek a tanulmányozása volt, hogy milyen algebrai tulajdonságokkal (elsősorban művelettartás) rendelkeznek különböző általános, nemkommutatív algebrai-metrikus struktúrával ellátott terek szürjektív izometriái. Vizsgálataink kiindulópontja a nevezetes Mazur-Ulam tétel, ami valós lineáris normált terek közötti szürjektív izometriák affinitását (a konvex kombinációra vonatkozó izomorfizmus voltát) bizonyítja. Kutatásainkban ezen klasszikus tétel messzemenő, nemkommutatív struktúrákra vonatkozó általánosításával foglalkoztunk. A nyert eredményeket felhasználva, melyek a szürjektív izometriák egyfajta lokális algebrai művelettartását bizonyítják különböző körülmények között, sikerült elsősorban mátrix- és operátoralgebrák pozitív kúpjai valamint unitér csoportjai távolságot tartó (illetve a szokásos távolságfogalomnál jóval általánosabb, ún. általánosított távolságmértéket megőrző) leképezéseit meghatározni. Kapcsolódó dolgozataink: [10, 11, 15, 16, 18, 24, 25].

A témában elsőként írt [10] dolgozatunkban számos általános érvényű eredményt nyertünk arra vonatkozóan, hogy nemkommutatív csoportok (illetve bizonyos részstruktúráik) között, melyek el vannak látva a műveletekkel kompatibilis távolságfüggvénnyel (pl. eltolás- és inverz-invariáns metrikával), a szürjektív izometriák lokálisan megőrzik egy algebrai műveletet, az ún. invertált Jordan hármasszorzatot. Így sok esetben a szürjektív izometriák közeli kapcsolatban állnak bizonyos algebrai transzformációkkal, izomorfizmusokkal. Már ebben a dolgozatban kiderült, hogy eredményeink a klasszikus Mazur-Ulam tétel igen hatékony általánosításai; a cikkben alkalmaztuk ezeket számos folytonos függvények alkotta csoport szürjektív izometriáinak leírására.

A fenti dolgozat további vizsgálatokat motivált, melyek eredményeit az alábbiakban részletezzük.

Operátoralgebrák pozitív definit kúpja és unitér csoportja izometriái és izomorfizmusai

Az [10] cikk folytatásaként a [11] dolgozatban leírtuk Hilbert-tér unitér csoportjának az operátornormára vonatkozó szürjektív izometriáit bemutatva ezen izometriáknak azon rendkívül fontos lineáris csoport automorfizmusaihoz való közeli kapcsolatát.

A [18] cikkben sikerült a fenti eredményt a projektvezető egy korábbi, a pozitív definit operátorok Thompson-metrikával ellátott és számos ok folytán igen fontos metrikus tere izometriáit leíró eredményével (Proc. Amer. Math. Soc., 2009) együtt kiterjeszteni általános operátoralgebrák (C^* -algebrák ill. Neumann-algebrák) esetére. Meghatároztuk Neumann-algebrák unitér csoportjai, illetve C^* -algebrák pozitív definit kúpjai (azaz pozitív invertálható elemeinek halmazai) az operátornormára illetve a Thompson-metrikára vonatkozó szürjektív izometriáinak pontos szerkezetét. Kiderült, hogy ezen izometriák közeli kapcsolatban állnak a teljes algebrák közötti Jordan *-izomorfizmusokkal. Utóbbi eredményünk a C^* -algebrák elméletében fontos szerepet betöltő, a szürjektív lineáris izometriákat leíró Kadison-tétel differenciálgeometriai megfelelőjének tekinthető, ugyanis a

Thompson-metrika a pozitív kúp természetes differenciálgeometriai struktúrájához tartozó távolságfogalom. Eredményeinkből következik pl. az az érdekes, esetleg meglepőnek is minősíthető tény, hogy amennyiben két C^* -algebra unitér csoportjai izometrikusak egymással (tehát pusztán metrikus szempontból egyenértékűek), úgy a kérdéses "nagy" algebrák Jordan $*$ -izomorfak, s így mind metrikus mind teljes algebrai (legalábbis Jordan $*$ -algebrai) szempontból is izomorfak.

Az izometriák algebrai viselkedésére [10]-ben kapott általános eredményeket alkalmasan alakítva és finomítva a [15] dolgozatban meghatároztuk Hilbert-tér Grassmann-sokaságai (adott véges rangú projekciói összességei) az operátornormából származó, nevezetes gap (hézag) metrikára vonatkozó szürjektív izometriáinak szerkezetét. Mind a tekintett struktúra, mind az említett metrika a matematika számos területen fontos szerepet játszik.

A [10, 11, 18] cikkekből kiderült hogy az ún. Jordan triple izomorfiák (az *aba* Jordan hármasszorzat műveletére vonatkozó izomorfiák) közeli kapcsolatban állnak metrikus csoportok és hasonló struktúrák egy széles körének szürjektív izometriáival, így azok fontos szerepet töltenek be az említett izometriák meghatározásában. Ezért ezen transzformációkat külön is vizsgáltuk, mégpedig nem csak az izomorfizmusokat, hanem általánosabban a kapcsolódó homomorfizmusokat is. A [16] ill. [24] dolgozatokban leírtuk a komplex unitér mátrixok csoportja illetve a pozitív definit mátrixok ún. twisted részcsoportja azon folytonos transzformációinak szerkezetét, melyek homomorfizmusok az említett Jordan hármasszorzás műveletére nézve. Továbbá, az így nyert eredmények segítségével teljes leírását adtuk az említett terek igen általános metrikákra (unitér invariáns normákból különböző módokon származó távolságfogalmakra) vonatkozó szürjektív izometriáinak. Ezek után a [29] még elbírálás alatt álló publikációban sikerült közös keretbe foglalni és lényegesen általánosítani a [24] dolgozatban szereplő eredményeket. A fő újdonságot ebben a cikkben az jelentette, hogy a korábban tárgyalt, valódi metrikákra vonatkozó szürjektív izometriák helyett olyan, úgynevezett általánosított távolságmértékeket megőrző szürjektív transzformációk struktúráját határoztuk meg, amely mértékek unitér-invariáns normákkal illetve bizonyos feltételeknek eleget tevő folytonos valós függvényekkel vannak paraméterezve. A [26] több mint 30 oldalas tanulmányban ezt a fonalat vittük tovább operátoralgebrák esetére. Hasonló, általánosított izometriáknak tekinthető transzformációkat vizsgáltunk bizonyos Neumann-algebrák pozitív definit kúpjai illetve unitér csoportjai között. A kérdéses leképezések meghatározása, leírása itt is az említett struktúrák közötti folytonos, a Jordan hármasszorzatra vonatkozó izomorfizmusok szerkezetének a meghatározásán (pontosabban azok a teljes algebrák közötti (lineáris) Jordan $*$ -izomorfizmusokhoz való kapcsolatának megmutatásán) alapult, ami ugyancsak a dolgozat részét képezi.

A továbbiakban erőteljesebben algebrai jellegű eredményeket említünk.

A [8] cikkünkben végtelen dimenziós szeparábilis Hilbert-tér unitér csoportja számos további algebrai tulajdonsággal rendelkező, illetve bizonyos operációkat megőrző transzformációját határoztuk meg. Ezek közül kiemeljük, hogy leírtuk ezen csoport azon bijekcióit, melyek megőrzik a multiplikatív kommutátort, s ennek egyszerű következményeként kaptuk az unitér csoport összes csoport-automorfizmusának (nem csak a folytonosoknak!) a leírását. Eszerint a végtelen dimenziós szeparábilis esetben a Hilbert-tér unitér csoportjának belső automorfizmusoktól eltekintve csak két automorfizmus van: az identitás és a konjugálás. Eredményeink háttérében egy, az unitér csoport kommutálást megőrző bijekcióinak szerkezetére vonatkozó tételünk áll, ami ugyancsak ezen

cikkben szereplő eredmény.

A [12] dolgozatban meghatároztuk mátrixalgebra pozitív szemidefinit kúpja ún. logaritmusos szorzatra vonatkozó automorfizmusainak a szerkezetét (egy enyhe regularitási feltétel mellett). Ez az érdekes művelet a pozitív definit operátorok terét kommutatív csoporttá teszi és fontos komputergrafikai (pl. DT-MRI képalkotás) valamint kvantummechanikai alkalmazásai vannak. Az említett automorfizmusok eléggé bonyolult, szokatlan alakúak, de sikerült őket zárt formulával leírni.

Az [27] dolgozatban C^* -algebra pozitív definit elemeinek természetes K-loop struktúráját tanulmányoztuk. A szóban forgó loop művelet $a \circ b = \sqrt{ab}\sqrt{a}$, aminek az algebrai mellett fontos differenciálgeometriai vonatkozásai vannak és alkalmazásokkal bír a fizikában is (kiderült, hogy szoros köze van a speciális relativitáselméletben szereplő "Einstein velocity addition" műveletéhez, valamint megegyezik a kvantummechanika matematikai leírásában fellépő Gudder-féle szekvenciális szorzattal). A cikkben különböző karakterizációit adtuk meg ezen műveletnek az összes binér művelet kategóriáján belül, továbbá megmutattuk, hogy asszociativitása, kommutativitása, ill. disztributivitása mind külön-külön ekvivalens az alapul vett algebra kommutativitásával. Tehát a pozitív definit kúp ellátva ezzel a művelettel egy olyan algebrai struktúra, melyben a jól ismert asszociativitás, kommutativitás, disztributivitás köztudottan független tulajdonságok egymással mind ekvivalensek, ami érdekes algebrai jelenség.

A témához tartozóként említjük még a [21] cikkben szereplő eredményeket, melyek adott C^* -algebra kommutativitására adnak kritériumot a hatvány-, az exponenciális-, illetve a logaritmus-függvény segítségével, s melyek közül az előbbi eredmények felhasználásra kerültek a [26] munkában.

A pozitív kúppal kapcsolatban további algebrai jellegű vizsgálatokat végeztünk, ezekről számolunk be az alábbiakban.

Operátorközepekkel kapcsolatos transzformációk

Az operátorközepek elmélete napjainkban igen széles körben vizsgált problémakör, aminek szerteágazó motivációja illetve alkalmazása van a matematika több területén. A közepeknek geometriai vonatkozásaik mellett algebrai tartalmuk is van; műveletnek tekinthetők a pozitív (definit vagy szemidefinit) operátorok halmazán. Kutatásaink során vizsgáltuk az így adódó algebrai struktúrák morfizmusait. Nevezetesen, a [6] dolgozatban enyhe regularitási feltételek teljesülése mellett meghatároztuk a pozitív szemidefinit operátorok összességének egy adott általános (Kubo-Ando-típusú) szimmetrikus operátorközepet megőrző bijektív transzformációit. Kiderült, hogy ezen transzformációk szerkezete egyszerű, mindegyikük invertálható korlátos lineáris vagy konjugált-lineáris operátorral balról történő, adjungáltjával pedig jobbról történő ún. kétoldali szorzásoperátor. Megjegyezzük, hogy ezen transzformációk leírása a pályázat egyik fő célkitűzése volt. Az [5] cikkünkben a klasszikus valós exponenciális- ill. logaritmus-függvény tulajdonságai által motiválva meghatároztuk azon folytonos függvényeket a pozitív definit mátrixok és az önadjungált mátrixok halmazai között, melyek a Kubo-Ando-féle geometriai közepet a számtani középbe transzformálják vagy megfordítva.

Munkánk igen tekintélyes részét képezték azon vizsgálatok, melyek eredményeit a következőkben mutatjuk be.

Kvantumstruktúrák transzformációi

Ezen csoportba azon eredményeink tartoznak, melyek a kvantummechanika matema-

tikai leírásában szereplő operátorstruktúrák különböző szimmetriáira vonatkoznak. A vizsgálatokat Wigner azon nevezetes tétele motiválja, melyben meghatározta a kvantummechanikai szimmetriatranszformációk alapvető csoportjának, kvantumrendszer tiszta állapotain az átmeneti valószínűséget invariánsan hagyó bijektív transzformációk összességének a szerkezetét.

A kevert állapotok vonatkozásában a relatív entrópia fogalma (pontosabban annak különböző fogalmai) alapvetően fontos szerepet játszanak a kvantuminformáció elméletében. A kutatás során folyamatosan vizsgáltuk az ilyen jellegű mennyiségekhez tartozó invarianciatranszformációkat, szimmetriákat. Ezen eredményeink többsége véges dimenziós, ugyanis a fent hivatkozott relatív entrópia fogalmak alapvetően ebben az esetben, tehát mátrixalgebrákra vonatkozóan definiáltak. Ez nem jelenti az alkalmazhatóság megszorítását, a kvantuminformáció elméletének éppen erre a közege van szüksége.

Az [1] dolgozatunkban leírtuk Hilbert-tér pozitív definit operátorai halmazának a szokásos rendezésre illetve a kaotikus rendezésre vonatkozó rendezés-automorfizmusait. Ezen eredmények alkalmazásaként meghatároztuk a sűrűségoperátorok vagy kevert állapotok terének azon bijekcióit, melyek megőrzik az Umegaki- illetve a Belavkin-Staszewski relatív entrópiát. Érdekes megemlíteni, hogy kiderült, hogy a relatív entrópiaként döntően használt Umegaki-féle relatív entrópiát megőrző leképezések a kaotikus rendezés-automorfizmusokkal, míg a kisebb mértékben használt Belavkin-Staszewski-féle relatív entrópiát megőrzők a szokásos rendezés automorfizmusokkal állnak szoros kapcsolatban. A cikk további érdekességeként említjük, hogy a pozitív definit operátorok összességén karakterizáltuk a fentebb már említett logaritmikus szorzatot, mint azt a lényegében egyetlen műveletet, ami a pozitív definit kúpot kommutatív rendezett csoporttá teszi a kaotikus rendezésre nézve.

A relatív entrópiával (pontosabban az Umegaki-féle, legelterjedtebb relatív entrópia fogalommal) kapcsolatos vizsgálataink kiemelkedő eredményét közöltük a [13] cikkben. A korábbi vizsgálatok egyfajta betetőzéseként, számos előző eredmény messzemenő általánosításaként sikerült meghatároznunk a sűrűségoperátorok halmaza azon transzformációinak szerkezetét, mégpedig a szürjektivitás feltételezése nélkül, melyek egy tetszőleges adott szigorúan konvex f függvény esetén invariánsan hagyják az ún. kvantum f -divergenciát. Ez a mennyiség a Csiszár Imre nevéhez fűződő nevezetes információelméleti f -divergencia fogalom kvantumelméleti megfelelője, amit Petz Dénes vezetett be, és ami az Umegaki-féle relatív entrópia jelentős általánosítása. Cikkünk konklúziója az, hogy az ezen mennyiséghez tartozó szimmetriatranszformációk egybevágóan a Wigner tételében szereplőkkel, azaz az alapul vett Hilbert-tér unitér ill. antiunitér transzformációiból származnak.

Ide kapcsolódik még a [23] dolgozatunk, amiben meghatároztuk a sűrűségoperátorok halmaza azon leképezéseinek struktúráját, melyek megőrzik a Holevo bound nevű mennyiséget, ami a kvantuminformáció elméletének egy másik alapmennyisége.

A kutatás vezetője egy W. Timmermannal közös cikkében (J. Phys. A, 2003) leírta a kvantumállapotok tere alapvető szürjektív izometriáit, nevezetesen a trace-normából származó metrikára vonatkozóakat. Ezt az eredményt terjesztettük ki [7] cikkünkben a trace-norma helyett Schatten-Neumann p -normákra vonatkozóan mégpedig több irányban. Ugyanezen cikkben leírtuk több relatív entrópia fogalommal kapcsolatban az ezeket a mennyiségeket megőrző transzformációkat a szürjektivitás feltételezése nélkül. Az állapotter izometriáival kapcsolatos további eredményeket tartalmaznak a [17, 22] dolgozatok.

A sűrűségoperátorok halmaza mellett másik alapvető kvantumstruktúra a kvantummechanikai változókat, obszervábiliseket leíró önadjungált operátorok tere. Ezen az egyik legfontosabb reláció az, amit a kvantummechanikában kompatibilitásnak, a matematikában pedig kommutálásnak, felcserélhetőségnek neveznek. Molnár és Šemrl egy cikkében (Q. J. Math. Oxford, 2005) meghatározta ezen halmaz összes olyan bijektív transzformációját, melyek megőrzik a felcserélhetőséget. Ahogy az várható, ezen leképezések igen "szabálytalanok" is lehetnek. Ezért merült fel annak a kérdésnek a vizsgálata, hogy ha a leképezésünk nemcsak a felcserélhetőséget, de annak valamilyen mértékét is invariánsan hagyja, akkor talán a szerkezete is sokkal regulárisabb. A [4] dolgozatunkban leírtuk az önadjungált operátorok tere azon nemlineáris bijekcióit, melyek megőrzik a felcserélhetőség mértékének mérésére szolgáló természetes mennyiséget, az operátorok kommutátorának operátor normáját. Kiderült, hogy ugyan még egy ilyen transzformáció sem lineáris általában, de a nemlineárist adó "rész" könnyen szeparálható, míg a visszamaradó "rész" igen szabályos, nevezetesen az alapstruktúra egy (lineáris) Jordan *-automorfizmus. A cikk eredményei motiválták a [28] dolgozatot, ahol a kommutátor normáját megőrző leképezéseket vizsgáltunk Hilbert-tér operátorok további osztályain. Fontos kiemelni, hogy a szóban forgó leképezések leírása abban a látszólag egyszerű esetben bizonyult különösen nehéznek, melyben az alapul vett Hilbert-tér 2-dimenziós.

Egy harmadik kvantumstruktúrával, nevezetesen a Hilbert-tér effektek struktúrájával kapcsolatban a [9] cikkünkben meghatároztuk véges, legalább 3-dimenziós Hilbert-tér effekt algebraja folytonos szekvenciális endomorfizmusainak szerkezetét. A korábbiakban több eredmény született szekvenciális automorfizmusokkal, izomorfizmusokkal kapcsolatban, de nem volt információ a bijektivitás feltételezésének elhagyása esetén. A cikk eredménye első ezen a területen. Ebből kiderül, hogy a kérdéses transzformációk szerkezete sokkal összetettebb a szekvenciális automorfizmusokénál. Az eredmény teljes leírást ad a folytonos endomorfizmusokról, azokat 4 különálló osztályba sorolja, megadva az egyes osztályokba tartozó endomorfizmusok pontos struktúráját. Kiemeljük, hogy az egyik osztály elemei éppen a mátrixadjungáltak (nem az operátorelméleti, hanem a mátrixinvertálásnál fellépő, aminek angol elnevezése "adjugate") az unitér hasonlósági transzformációkkal való kompozíciói, így tételünk eme része az adjungálás műveletének egy absztrakt karakterizációját is szolgáltatja. A cikkben érveket közlünk még amellett, hogy a folytonosság feltételezése nélkül nem várható semmilyen hasonló érdemi eredmény.

Vizsgálataink következő területe reflexivitási kérdésekkel kapcsolatos.

Reflexivitás

Ebben a tárgyban Hilbert-tér (vagy Banach-tér) operátorok struktúrái transzformációcsoportjainak reflexivitásával kapcsolatos kérdésekkel foglalkoztunk. A kérdés annak vizsgálatára irányult, hogy az illető transzformációcsoportok mennyire meghatározottak elemeik lokális hatásai által. A [14] cikkbeli eredményeink közös jellemzője olyan jellegű, meglepőnek tűnő állítások bizonyítása, melyek azt mutatják, hogy tetszőleges leképezés, ami lokálisan (2-pontonként) megegyezik az adott transzformációcsoport valamely (a pontoktól függően változó) elemével, szükségképpen globálisan is egybeesik az illető csoport egy elemével (azaz szükségképpen eleme a csoportnak). A dolgozatban három fontos Hilbert-tér operátorok alkotta metrikus tér szürjektív izometriái csoportjának (illetve bizonyos kapcsolódó automorfizmuscsoportoknak) a reflexivitását igazoló tételek találhatóak. Ezen terek egy adott H Hilbert-tér esetén H unitér csoportja valamint általá-

nos lineáris csoportja az operátor norma metrikájával valamint H pozitív definit operátorainak kúpja a Thompson-metrikával.

Vizsgálataink ezen köréhez tartozik [19] cikkünk, melyben ún. bilokális $*$ -automorfizmusokkal foglalkoztunk. Ez a fenti bekezdésben említett lokális transzformáció fogalomnál jóval gyengébb feltételt jelent, s ezért lényegesen enyhébb reflexivitási tulajdonság várható el vele kapcsolatban. Említett cikkünkben sikerült végtelen dimenziós szeparábilis komplex Hilbert-tér teljes operátoralgebrájának lineáris bilokális $*$ -automorfizmusait karakterizálni megmutatva, hogy ezek ugyan nem szükségképpen $*$ -automorfizmusok, de algebrailag pontosan jellemezhetők azzal, hogy ők éppen a kérdéses algebra olyan $*$ -homomorfizmusai, melyek az egységelemet önmagába képezik. Az eredmény értékéhez hozzájárul a bizonyítás fő gondolata, nevezetesen az az észrevétel, hogy az állítás lényegében ekvivalens az operátorok Davis-Wielandt shell-jének konvexitására vonatkozó nemrég éremmel. A cikk fő tétele által motiválva a [25] dolgozatban leírtuk mátrixalgebák bilokális automorfizmusait megmutatva, hogy ezek bizonyos speciális, degenerált alakú transzformációktól eltekintve automorfizmusok vagy anti-automorfizmusok. Továbbá megmutattuk, hogy végtelen dimenziós szeparábilis komplex Banach-terek egységelemes standard operátoralgebráinak a folytonos és bijektív bilokális automorfizmusai szükségképpen automorfizmusok.

Függvényterek izometriái

Kutatásaink ezen utolsó területén a valószínűségi eloszlásfüggvények terének izometriáira vonatkozó eredményeket nyertünk. A vizsgálatokat a kompakt tereken értelmezett folytonos függvények sup -normával ellátott Banach-terei szürjektív lineáris izometriáinak szerkezetére vonatkozó nevezetes Banach-Stone tétel motiválta. A meghatározó újdonság vizsgálatainkban az, hogy itt nemlineáris izometriákat tekintünk és a távolság sem szükségképpen a sup -normából ered.

A [2] cikkünkben pontos leírását adtuk az említett tér szürjektív izometriáinak a nevezetes Lévy-metrikára vonatkozóan. A [3] dolgozatunkban meghatároztuk az abszolút folytonos, szinguláris, illetve diszkrét eloszlásfüggvények tereinek Kolmogorov-Smirnov metrikára vonatkozó szürjektív izometriáit. A [20] cikkben pedig egy, a valószínűségi eloszlásfüggvények Kolmogorov-Smirnov izometriáira vonatkozó korábbi eredményünket (J. Math. Anal. Appl., 2008) terjesztettük ki az általánosított eloszlásfüggvények terére. Kapott tételeink abban az értelemben hasonlítanak a klasszikus Banach-Stone tételre, hogy itt is kiderül, az izometriák mind közeli kapcsolatban állnak bizonyos kompozíció-operátorokkal. A bizonyítások technikája azonban teljesen különbözik a klasszikus, lineáris izometriák esetében alkalmazottakétól.

Végezetül néhány adat a kutatással kapcsolatban.

A kutatócsoport 2 főből állt: a témavezetőből és az induláskor még PhD hallgatójából, aki a tavalyi év végén védte meg PhD disszertációját [30]. Ebben a pozitív operátorok különböző struktúráinak megőrzési problémáira vonatkozó eredményeket, és benne természetesen elsősorban az ilyen irányú saját eredményeit foglalta össze, melyek nagy része a jelen projekt során született.

Eredményeinket az OTKA támogatás feltüntetésével 28 db cikkben foglaltuk össze. Ezek közül 22 megjelent, 4 megjelenés alatt áll, 2 pedig közlésre van benyújtva. Az [26] munka Charles Batty oxfordi professzor 60. születésnapjának alkalmából szerkesztett, a Birkhäuser "Operator Theory: Advances and Applications" c. igen nagy presztízsű

könyvsorozat külön kötetében fog megjelenni, és a kötet szerkesztőinek felkérésére született.

A matematikai lapok ISI Web által összeállított, impakt faktorra alapozott rangsorában a 0.780-nál magasabb impakt faktorú folyóiratok adják a minősített folyóiratok felső negyedét. A már megjelent vagy megjelenés alatt álló 26 db dolgozatunkból ebbe a kategóriába esik cikkeink fele, 13 db. Ezek közül 10 db a bűvös 1.000-nál magasabb IF-ú periodikában jelent meg. (Megjegyezzük, hogy a publikáló folyóiratok nem mindegyike szerepel a matematikai folyóiratok listáján, vannak közöttük fizikai újságok is).

Eredményeinkről hazánkban kívül 13 országban tartottunk előadást nemzetközi konferenciákon, illetve egyetemek szemináriumain és kollokviumain. Ezek közül legtöbbet, szám szerint 8-at az USA-ban. A konferenciaelőadások nagy többsége (a vezető esetén szinte mindegyike) meghívás alapján történt.

A projekt során készített publikációk listája időrendben

- [1] L. Molnár, *Order automorphisms on positive definite operators and a few applications*, Linear Algebra Appl. **434** (2011), 2158–2169.
- [2] L. Molnár, *Lévy isometries of the space of probability distribution functions*, J. Math. Anal. Appl. **380** (2011), 847–852.
- [3] L. Molnár, *Kolmogorov-Smirnov isometries and affine automorphisms of spaces of distribution functions*, Cent. Eur. J. Math. **9** (2011), 789–796.
- [4] L. Molnár and W. Timmermann, *Transformations on bounded observables preserving measure of compatibility*, Int. J. Theor. Phys. **50** (2011), 3857–3863.
- [5] L. Molnár, *Continuous maps on matrices transforming geometric mean to arithmetic mean*, Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. (special issue dedicated to Prof. Antal Járai on the occasion of his 60th birthday) **35** (2011), 217–222.
- [6] L. Molnár, *Maps preserving general means of positive operators*, Electron. J. Linear Algebra **22** (2011), 864–874.
- [7] L. Molnár and G. Nagy, *Isometries and relative entropy preserving maps on density operators*, Linear Multilinear Algebra **60** (2012), 93–108.
- [8] L. Molnár and P. Šemrl, *Transformations of the unitary group on a Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **388** (2012), 1205–1217.
- [9] G. Dolinar and L. Molnár, *Sequential endomorphisms of finite dimensional Hilbert space effect algebras*, J. Phys. A: Math. Theor. **45** (2012) 065207.
- [10] O. Hatori, G. Hirasawa, T. Miura and L. Molnár, *Isometries and maps compatible with inverted Jordan triple products on groups*, Tokyo J. Math. **35** (2012), 385–410.
- [11] O. Hatori and L. Molnár, *Isometries of the unitary group*, Proc. Amer. Math. Soc. **140** (2012), 2141–2154.
- [12] G. Dolinar and L. Molnár, *Automorphisms for the logarithmic product of positive semidefinite operators*, Linear Multilinear Algebra **61** (2013), 161–169.

- [13] L. Molnár, G. Nagy and P. Szokol, *Maps on density operators preserving quantum f -divergences*, Quantum Inf. Process. **12** (2013), 2309–2323.
- [14] F. Botelho, J. Jamison and L. Molnár, *Algebraic reflexivity of isometry groups and automorphism groups of some operator structures*, J. Math. Anal. Appl. **408** (2013), 177–195.
- [15] F. Botelho, J. Jamison and L. Molnár, *Surjective isometries on Grassmann spaces*, J. Funct. Anal. **265** (2013), 2226–2238.
- [16] L. Molnár, *Jordan triple endomorphisms and isometries of unitary groups*, Linear Algebra Appl. **439** (2013), 3518–3531.
- [17] G. Nagy, *Isometries on positive operators of unit norm*, Publ. Math. Debrecen **82** (2013), 183–192.
- [18] O. Hatori and L. Molnár, *Isometries of the unitary groups and Thompson isometries of the spaces of invertible positive elements in C^* -algebras*, J. Math. Anal. Appl. **409** (2014), 158–167.
- [19] L. Molnár, *Bilocal $*$ -automorphisms of $B(H)$* , Arch. Math. **102** (2014), 83–89.
- [20] L. Molnár and P. Szokol, *Kolmogorov-Smirnov isometries of the space of generalized distribution functions*, Math. Slovaca **64** (2014), 433–444.
- [21] L. Molnár, *A few conditions for a C^* -algebra to be commutative*, Abstr. Appl. Anal. Volume 2014 (2014), Article ID 705836, 4 pages.
- [22] G. Nagy, *Preservers for the p -norm of linear combinations of positive operators*, Abstr. Appl. Anal. 2014 (2014), Article ID 434121, 9 pages.
- [23] L. Molnár and G. Nagy, *Transformations on density operators that leave the Holevo bound invariant*, Int. J. Theor. Phys., to appear.
- [24] L. Molnár, *Jordan triple endomorphisms and isometries of spaces of positive definite matrices*, Linear Multilinear Alg., to appear.
- [25] L. Molnár, P. Šemrl and A.R. Sourour, *Bilocal automorphisms*, Oper. Matrices, to appear.
- [26] L. Molnár, *General Mazur-Ulam type theorems and some applications*, to appear in a volume of the series "Operator Theory: Advances and Applications".
- [27] R. Beneduci and L. Molnár, *On the standard K -loop structure of positive invertible elements in a C^* -algebra*, J. Math. Anal. Appl., to appear.
- [28] Gy.P. Gehér and G. Nagy, *Maps on classes of Hilbert space operators preserving measure of commutativity*, submitted.
- [29] L. Molnár and P. Szokol, *Transformations on positive definite matrices preserving generalized distance measures*, submitted.
- [30] G. Nagy, *Preserver problems on structures of positive operators*, PhD-disszertáció, 2013.

Debrecen, 2014.06.29.

Molnár Lajos