Algebra és algoritmusok, 2009.03.01-2014.03.31

Projektünk keretében a következő témakörökben végeztünk kutatásokat:

Véges ponthalmazok Gröbner-bázisai

A [FHR2009CPC] dolgozatban tovább tudtuk általánosítani a teljes uniform halmazrendszer Gröbner-bázisaival, standard monomjaival és Hilbert-függvényével kapcsolatos korábbi eredményeink egy jelentős részét a moduláris értelemben vett l-széles teljes családok esetére. Pontosabban fogalmazva, legyen q a p prím egy hatványa, n, l, d pozitív egészek és legyen F az n elemű alaphalmaz összes olyan S részhalmazának családja, ahol az S mérete a [d,d+l-1] intervallum valamelyik egész elemével kongruens modulo q. Az F halmazrendszerhez tartozó karakterisztikus vektorok halmazát tekintjük a a p-elemű test feletti n-dimenziós vektortérben. A dolgozatban sikerült leírnunk ennek a pontrendszernek a Gröbner-bázisait. Itt is igaz a meglepő tény, ami az uniform esetben, hogy a bázis csupán a változók sorrendjétől függ, ezen túl a választott tagsorrend közömbös. Sikerült formulát adnunk a pontrendszer (halmazrendszer) Hilbert-függvényére is. Utóbbi következményeként extremális kombinatorikai becsléseket nyertünk. A dolgozat két legfontosabb eszköze a Felszeghy, Ráth és Rónyai által korábban kidolgozott lex-játék, valamint a rácsutak leszámlálására szolgáló klasszikus technikák.

A [FR2009SP] dolgozat felkérésre írt áttekintő jellegű könyvfejezet, amely a Rónyai L. és munkatársai Gröbner bázisok kombinatorikai alkalmazásaival foglalkozó korábbi eredményeinek egy részéről ad összefoglalót. Az eredmények tehát nem újak, a bizonyítások néhány esetben igen. A lex-játék módszerét ismerteti először a dolgozat. Ez egy elméleti és algoritmikus szempontból is hatékony módszer véges ponthalmazok lexikografikus rendezésre vonatkozó normálisának (standard monomjainak) leírására, illetve kiszámítására. A módszer bemutatása után alkalmazások következnek. Először a szimmetrikus polinomok alaptételének A. Garsia által talált kiterjesztését bizonyítjuk a lex-játék segítségével. Ezt követően a teljes uniform családok illeszkedési mátrixának modulo p rangjára vonatkozó Wilson-formulát, illetve annak Friedl, Hegedűs és Rónyai által adott általánosítását igazoljuk. A Hilbert-függvény kombinatorikai alkalmazásai után Harima egy dualitási tételének a Boole-változatát bizonyítjuk, ennek alkalmazásaként pedig egy minimax-tételt adunk.

A fenti eredményeket több konferencián is ismertettük (Galway, Linz, Einhoven)

A [RM2011SP] felkérésre írt összefoglaló a Gröbner-bázisok kombinatorikai tulajdonságairól a 4th Conference on Algebraic Informatics kötetébe, ahol Rónyai Lajos meghívott előadó volt. A korábbi eredmények áttekintésén túl a dolgozat tartalmaz eddig nem publikált eredeti eredményeket is az S-extremális halmazrendszerekről. Ezeknek jellemzését adtuk Gröbner-bázisok segítségével, és egy a korábbinál gyorsabb módszert javasoltunk a felismerésükre.

A [HR2012JAA] dolgozatban az uniform halmazcsaládok szétzúzási (shatter) korlátjával foglalkozó Frankl–Pach-tételt terjesztjük ki kettőnél több érték esetére. A bizonyításban Gröbner-bázisokat és standard monomokat alkalmazunk. Módszerünk segítségével algebrai bizonyítást adunk Alon egy kapcsolódó kombinatorikai tételére is.

A [KR2012C] dolgozatban a Noga Alontól származó kombinatorikai Nullahelytételt arra az esetre terjesztjük ki, amikor halmazok helyett multihalmazokon vett polinomfüggvényekkel dolgozunk. Az általánosabb tételt a véges differenciák módszerével, illetve gyűrűelméleti úton is igazoljuk. Néhány alkalmazást is tárgyalunk, ezek multiplicitásokat tartalmazó kiterjesztései ismert tételeknek.

A [KMR2010AX] dolgozatban test helyett tetszőleges egységelemes kommutatív gyűrűkre terjesztettük ki Noga Alon kombinatorikus nullahelytételét. Az általánosabb gyűrű feletti tételben viszont megszorítással kell élnünk a vizsgált ponthalmazokat illetően. Ez általában erősen korlátozza az alkalmazhatóságot, azonban 0,1-vektorok esetén nem jelent érdemi akadályt. Az általános tétel segítségével sikerült kiterjesztenünk a Boole-kocka lefedéséről szóló Alon–Füredi-tételt test helyett kommutatív gyűrű feletti hipersíkok esetére.

Az eredményekről konferenciákon és szemináriumi előadásokon is beszámoltunk. (Colombus, Ohio, Linz, Debrecen)

Egy F halmazrendszer szétzúzza az alaphalmazának S részhalmazát, ha az S minden X részhalmaza megkapható mint H és S metszete, ahol H az F alkalmas eleme. A jólismert Sauer egyenlőtlenség szerint az F legalább |F| halmazt szétzúz. A [MR2013C] dolgozatban az egyenlőség esetére fordítottuk a figyelmünket: az F rendszert S-extremálisnak nevezzük, ha pontosan annyi részhalmazt zúz szét, mint az alaphalmaz elemszáma. Az S-extremális halmazrendszerek leírása fontos nyitott kérdés a kombinatorikában. A jelen munkában tartalmazási gráfjuk segítségével sikerült leírnunk azokat az S-extremális rendszereket, amelyeknek a Vapnik–Chervonenkis-dimenziója 1. Egy további eredményt tudtunk igazolni Gröbner-bázisok alkalmazásával, ami kiindulópont lehet a magasabb VC-dimenziós esetek vizsgálatához. S-extremális rendszerek vetületeiről is nyertünk egy érdekes eredményt. A vizsgálatok egy sejtés megfogalmazásához is elvezettek.

Algebrai varietások struktúrája

Kutatásaink a pályázati időszakban három fő területre koncentrálódtak: a részleges kohomologikus pozitivitás tanulmányozására (ld. [GK2013AX] és [K2013AIF]), algebrai felületeken negatív görbék keresésére (ld. [BHKKMRSz2013Duke]. és [BBCRHJKKMSST2012EMS]), illetve Newton-Okounkov testek megismerésére (ld.[AKL2013IMRN],[KLM2013iMA], [KLM2012AM],[BKMSz2014AX],[DKMSz2014AX])

A részleges pozitivitás során a főbb eredmények eltűnési tételek voltak: egyrészt beláttuk Fujita eltűnési tételének a területre eső változatát, másrészt bebizonyítottuk Kodaira eltűnési tételét magasabb kohomológiákra Du Bois szingularitások esetén.

Az algebrai felületeken értelmezett negatív görbék területén a két fő eredmény (mindkettő a [BBCRHJKKMSSzT2014ILN] cikkben található) egyrészt a korlátos negativitási sejtés igazolása valódi endomorfizmussal rendelkező felületekre, másrészt annak megmutatása, hogy váratlan módon minden kvaternió típusú Hilbert-moduláris felületen csak véges sok negatív önmetszésű Shimura-görbe van.

A Newton-Okounkov testek kutatása során többek között bebizonyítottuk, hogy csak megszámlálható sok van belőlük, és minden felületen értelmezett egyenesnyaláb Okounkov-testje egy majdnem racionális poligon. Emellett vizsgáltuk Newton-Okounkov testeken értelmezett geometriai függvények tulajdonságait.

A [HK2011DCG] dolgozatban rácspolitópokkal foglalkoztunk. Golysev sejtése szerint minden legfeljebb 5-dimenziós síma politóp Ehrhart-polinomja gyökeinek valós része $-1/2$. A cikkben erre adtunk egy elemi bizonyítást és explicit módon le is írtuk a gyököket. Megadtunk olyan 6-dimenziós sima politópokat, ahol ez a tulajdonság nem igaz.

A [H2011CA] dolgozatban a szimpliciális politópokra vonatkozó Dehn-Sommerville-egyenletekre adtunk egy új bizonyítást. A bizonyítás szabad feloldásokat és a Stanley-Reisner-gyűrűk elméletét használja. A dolgozatban véges részbenrendezett P halmaz rendezésideáljai hálójában az i rangú Boole-intervallumok száma és egy a P-ből kapható egyszerű $G(P)$ gráf K_{i+1}-klikkjei száma közti kapcsolatot is megadtunk.

Lineáris algebrai, numerikus és szimbolikus számítási módszerek új alkalmazásai

A többtényezős döntéshozatal elméletében fontos szerepet játszanak a páros összehasonlítás-mátrixok. Ezek olyan pozitív valós elemű négyzetes $A = (a_{ij})$ mátrixok, amelyeknél minden i, j indexpárra teljesül az $a_{ij}a_{ji} = 1$ egyenlőség. Az ideális mátrixok itt éppen az 1 rangúak. A gyakorlatban több ok miatt is nehéz ezt elérni. Az egyik döntéshozatali elmélet (Saaty) szerint az A mátrix annál közelebb van az ideálishoz, minél kisebb a maximális sajátértéke (az ún. Perron-sajátérték). Egy másik megközelítés az ideális mátrixtól való legkisebb négyzetes (LS) eltéssel méri az A jóságát. Ebben a két modellben dolgoztunk, és a hiányos esettel foglalkoztunk. Ekkor az A mátrixnak csak bizonyos elemei adottak, és a kérdéses modell (Saaty, vagy LS) szerinti legjobb B kiegészítését tanulmányoztuk. Sikerült egyszerű gráfelméleti hátterű szükséges és elégséges feltételt adnunk az optimum, azaz B egyértelműségére. Ez a feltétel mindkét modell esetén egy az A mátrixhoz rendelt gráf összefüggősége. A tételek alapján algoritmusokat adtunk a B meghatározására. A módszerek működését numerikus példákkal illusztráltuk. Az eredményeket a [BFR2010MCM] dolgozatban publikáltuk. Egy további dolgozatban rekurzív algoritmust dolgoztunk ki páros összehasonlítási mátrixok approximálására [FR2011NLAA].

A [TR2011MATEP] dolgozatban pentadiagonális együttható mátrixok invertálására rekurzív eljárást adtunk meg.

A [BLR2013AX] dolgozatban sikerült igazolnunk John Edensor Littlewood egy nevezetes sejtését: a háromdimenziós euklideszi térben létezik hét, páronként egymást érintő, végtelen hosszú, 1 sugarú hengerfelület. A megközelítésünk algebrai, szimbolikus és numerikus számítási technikákat is alkalmaz. Abból a polinomegyenlet-rendszerből indultunk ki, amely leírja a hengerek szimmetriatengelyének helyzetét a térben. A két első henger szögét 90 fokban rögzítettük azért, hogy ugyanannyi változónk (nevezetesen 20) legyen mint egyenletiünk. Homotópiás módszerrel sikerült közelítő megoldást találnunk. Hauenstein és Sottile alphaCertified módszerével, amely Stephen Smale alfa-elméletén alapszik, tudtuk igazolni, hogy az általunk nyert közelítő megoldás kis környezetében a rendszernek pontos és valós megoldása van.

Algebrai struktúrák algoritmikus vizsgálata

Az asszociációs sémák magasabb dimenziós általánosításai hasznosnak bizonyulnak véges testek feletti egyváltozós polinomok determinisztikus felbontásában. Megfogalmaztunk egy sejtést az ilyen struktúrák bizonyos sepciális eseteivel kapcsolatban. A sejtésből determinisztikus polinomidejű faktorizáló algoritmus létezése következne. A sejtés irányába mutató első eredményeink valamivel megjavítják az eddig ismert leggyorsabb determinisztikus polinomfaktorizáló módszer futási idejét, és speciális fokszámok esetére polinomidejű felbontást adnak. Az ereményeket az [IKS2009ISAAC] dolgozatban jelentettük meg.

Több olyan determinisztikus polinomidőben megoldható algebrai problémát találtunk, amely mátrixalterekben maximális rangú mátrixok keresésének speciális esete. Ide tartozik az az eset, amikor az alteret egy tetszőleges rangú és több egy rangú mátrix feszíti ki, továbbá modulusok ciklikusságának konstruktív eldöntése. Újabban sikerült arra az esetre is hatékony módszert felfedezni, amikor az altér (ismeretlen) 1 rangú mátrixokkal kifeszíthető.

Az eredményeket az [IKS2010SIAM] valamint az [IKQS2014LIPI] dolgozatokban közöltük.

Az [I2012QIC] dolgozatban kvantum-algoritmust dolgoztunk ki a rejtett részcsoport problémájának (Hidden Subgroup Problem) arra az esetére, amikor a keresendő részcsoport a felső háromszögmátrixok csoportjának egy ismeretlen konjugáltja. A módszer polinomidejű, amennyiben az alaptest elemszáma nem sokkal alacsonyabb a dimenziónál. Ez az első olyan nemtriviális rejtett-részcsoport-algoritmus, amely (majdnem) egyszerű csoportok egy nemkonstans rangú osztályában hatékonyan működik.

Sikerült polinomidejű kvantum-algoritmust adnunk a rejtett részcsoport problémájának megoldására 2 nilpotencia osztályú véges csoportokban is [ISS2012A]. Egy korábbi eredményünkre támaszkodva feloldható csoportok rejtett részcsoport-porblémájára szubexponenciális algoritmust adtunk [FIMSS2014SIAM], mely konstans exponens és konstans feloldhatósági hossz esetén polinomidőben fut. Ezeken túlmenően a problémának egy olyan általánosítását találtuk, amely rámutat bizonyos fajta rejtett polinomok megtalálását célzó feladattal való kapcsolatra [DISW2013SIAM]. Utóbbi polinomos problémára sikerült fontos esetekben hatékonyan működő, a rejtett részcsoportos megközelítéstől teljesen független hatékony megoldást találnunk [DHIS2014AX].

Az [IKLSW2012IARCS] dolgozatban alsó és felső korlátokat adtunk bizonyos gráftulajdonságok (többek közt az összefüggőség, teljes párosítás valamint Euler-kör létezése) kommunikációs bonyolultságára mind a determinisztikus, mind a klasszikus randomizált, valamint a kvantum modellben.

Az [IKSR2012MC] dolgozatban olyan technikákat adunk meg, amelyekkel az Általánosított Riemann-Sejtés (GRH) használata kiküszöbölhető bizonyos korábbi, a véges testek feletti egyváltozós polinomok felbontására szolgáló algoritmikus eredményekből. H. W. Lenstra nagy hatású eredményei nyomán és szellemében több Galois-elméleti konstrukciót általánosítunk véges testekről véges, nem feltétlenül kommutatív féligegyszerű algebrákra (körosztási bővítés, Kummer-elmélet, Teichmüller-részcsoport). Ezek segítségével tudjuk GRH-mentessé tenni az érveléseket.

A [JMRSz2012JSC] dolgozatban a szerzők egyik korábbi közös munkájukban algoritmust adtak a nyommátrix és a radikál kiszámítására a polinomgyűrű olyan I ideálja esetén, amelynek véges sok projektív zérusa van csak, egyik sem végtelen távoli pont, és a polinomgyűrű I szerinti faktora Gorenstein. Az utóbbi egy igen erős, dualitást posztuláló feltevés. A jelen munkában sikerült az algoritmust kiterjesztenünk azokra az esetekre, amikor létezhet végtelen távoli zérushelye I-nek, illetve amikor a faktor nem feltétlenül Gorenstein-tulajdonságú. Mourrain egy korábban kidolgozott technikájára alapozva javasoltunk a dolgozatban egy Bézout-mátrixokra építő módszert az I radikáljának a számítására. Ez abban a speciális esetben működik, amikor I teljes metszet.

A nyom mátrixok hasznosnak bizonyulnak az egyenletrendszer vizsgálatában, például segítségükkel megkaphatók a rendszerhez tartozó (faktor-)algebra szorzási mátrixai. Két eljárást javasolunk a nyom mátrixok számítására. Az első Macaulay-típusú rezultánsokat használ, a második Bézout-mátrixokon alapul.

Az [IRSch2012JA] dolgozat jelentős előrelépést nyújt az algebrai számtestek feletti teljes mátrixalgebrákra vonatkozó explicit izomorfizmus problémát illetően. Itt az input egy adott A algebra (struktúrakonstansokkal megadva), amelyről tudjuk, hogy izomorf a K számtest feletti n-szer n-es mátrixok algebrájával. A feladat egy izomorfizmus (ezzel ekvivalens módon egy K felett n-dimenziós A-modulus) explicit megadása. A korábbiaknál sokkal hatékonyabb algoritmust nyertünk arra az esetre, amikor az alaptest Q feletti dimenziója kicsi, és az n dimenzió korlátos. A módszernek több érdekes alkalmazása van, egyebek között az aritmetikai geometria és az algebrai geometria területén is.

A kutatásról ismertetés jelent meg az Oberwolfach Reports-ban is [R2011OWR37]. A munkához kapcsolódóan Rektori Különdíjas TDK-munka született 2011-ben a BME TTK-n, [L2011TDK].

A témakörben Rónyai Lajos meghívott előadó volt 2011-ben Linzben és Oberwolfachban és az ELTE-n.

További eredmények születtek e témában az [ILR2013JAA] dolgozatban is. Legyen K egy algebrai számtest, aminek a racionális test feletti foka d, a diszkriminánsa pedig D, A pedig egy asszociatív algebra K felett, ami struktúrakonstansokkal adott, mint input. Tegyük fel továbbá, hogy A izomorf az $M_n(K)$ mátrixalgebrával (a K feletti n-szer n-es mátrixok algebrájával) valamely n egészre. Tegyük fel még, hogy

n, d és D korlátosak. Korábbi munkánkban ezekkel a feltételekkel polinom idejű ff-algoritmust adtunk az izomorfizmus explicit konstrukciójára, vagyis egy a K felett n-dimenziós A-modulus találására. Ebben a munkában jelentősen egyszerűsítjük az algoritmust azokban az esetekben, amikor n<44 és K vagy a racionális számok teste, vagy a Gauss-racionálisok, vagy pedig az Eisenstein-racionálisok teste. Erdeményeink Kitaoka és Coulangeon rácsok tenzorszorzatára vonatkozó kutatásain alapulnak.

Csoportok és reprezentációk

A [GHM2011JA] dolgozatban megfogalmazzuk az Oliver-sejtés erős vátozatát és belátjuk a teljesülését a szimmetrikus csoportok és az általános lineáris csoportok p-Sylow részcsoportjára.

A [HKS2011CA] dolgozatban Külshammer egy sejtését vizsgáljuk, amely egy karakter és konjugáltjának szorzatában az irreducibilis alkotók számára ad egy kongruencia-feltételt. Hasonló sejtést fogalmazott meg konjugáltosztályokra is. A cikkben a sejtéseket igazoljuk speciális csoportosztályokra.

A [CHHH2011CUP] dolgozatban elégséges feltételt adunk véges csoport szuperfelodhatóságára.

A [HHSz2012OJM] dolgozatban megfogalmazzuk a Brauer, Olsson és Eaton-sejtések valós változatait. $p = 2$ esetben bebizonyítjuk ciklikus defekcsoportú blokkokra valamint triviális valós magú csoportok 2-fő-blokkjára. A $p > 2$ esetre ellenpéldát adunk. Jellemezzük a blokk defektcsoportjának G-konjugáltosztályait valamint valós és racionális G-osztályait is.

A [HHKM2011PEMS] dolgozatban Héthelyi, Külshammer és Keller korábbi eredményeit egészítjük ki. Belátjuk, hogy véges sok nem feloldható, p-feloldható csoport kivételével egy csoport konjugáltosztályai száma legalább $2(p-1)^{1/2}$ és pontosan akkor van egyenlőség, ha $(p-1)^{1/2}$ egész szám.

A [K2011] publikáció a Bevezetés az algebrai kombinatorikába c. elektronikus jegyzet, melyben bevezetést adunk szimmetrikus függvényekről és a szimmetrikus csoportok reprezentációelmétéről . A jegyzet elérhető a http://www.math.bme.hu/∼kalex honlapon.

A [HK2011JA] dolgozatban metaciklikus p-csoportok irreducibilis karaktereit és konjugátosztályait vizsgáljuk páratlan p-re. Belátjuk, hogy ha $|G'| = p^n$, akkor G-nek $|G : G'|(p-1)/p^{k+1}$ darab p^k-adfokú irreducibilis karaktere van és $|Z(G)|(p^k - p^{k-2})$ darab p^k-hosszú konjugáltosztálya. Ezen kívül $|G| = |Z(G)||G'|^2$. Foglalkozunk a Glauberman által bevezetett centrálisan nagy részcsoport foglamával is. Megmutatjuk, hogy $p = 2$-re a fenti az eredmények nem teljesülnek. A $p > 2$ esetben a kis rangú p-csoportokat is tanulmányozzuk.

A [HKS2014JA] dolgozatban az Olsson-sejtéssel foglalkozunk. Ha B egy véges csoport p-blokkja D defektcsoporttal, akkor Olsson sejtése szerint $k_0(B) \leq |D : D'|$, ahol $k_0(B)$, B nulla magasságú irreducibilis karakterei száma. Brauer belátta az Olsson-sejtést abban az esetben, amiko D diéder 2-csoport. Azt mutatta meg, hogy bizonyos algebrailag konjugált szubszekciók G-ben is konjugáltak. Ebben a cikkben általánosítjuk Brauer módszerét tetszőleges p prímre és tetszőleges defektcsoportra. Ez Robinson két eredményét javítja meg. A $p > 3$ esetben megmutatjuk, hogy az Olsson-sejtés igaz 2-rangú defektcsoportokra és minimális nem Abel defektcsoportokra.

A [HHP2014AX] dolgozatban az egyszerű $Sz(q)$ Suzuki-csoport részcsoportjainak a kombinatorikus valamint közönséges mélységét vizsgáljuk. Meghatározzuk ezen invariánsokat a maximális és néhány egyéb részcsoport esetén.

A számítástudomány algebrai, logikai és számelméleti alapjai, alkalmazások

a) Alkalmazások optikai hálózatokra

A [TWHR2011IEEE] dolgozat a kommunikációs mérnöki munkában, optikai hálózatok hibaelemzése kapcsán felmerülő algoritmikus és tervezési kérdésekkel foglalkozik. Matematikai szempontból a kombinatorikus csoport-tesztelés (CGT) strukturált változatáról van szó. Itt a tesztelendő elemek egy gráf (optikai hálózat) éleit jelentik. A teszthalmazok nem lehetnek akármilyenek, általában összefüggőknek kell lenniük, de más, ennél szigorúbb modellek is értelmesek. Ha egy él meghibásodik, akkor az őt tartalamzó teszthalmazok (és csak azok) hibát jeleznek. E hibajelzésekből kell tudnunk azonosítani a hibás élet. A dolgozatban azzal az esettel foglalkozunk, amikor legfeljebb 1 él lehet hibás.

Egyebek között majdnem optimális eredményt adunk az ún. m-trail (amikor minden teszthalmaznak van nyitott vagy zárt Euler-bejárása) modellben teljes gráfokra. Egy új heurisztikus algoritmust (RCS) javasolunk, amely elég jó eredményeket (kevés halmazból álló tesztrendszereket) ad gyakorlati méretű és szerkezetű gráfokra.

A [THR2010IEEE] dolgozatban az előző kutatási témának azzal az esetével foglalkoztunk, amikor a gráf egy négyzetrács, a teszthalmazoknak pedig összefüggő élhalmazoknak kell lenniük (m-tree modell). Lényegében optimális, körülbelül $\log_2 |E|$

méretű tesztrendszert sikerült megadni, ahol E a gráf élhalmaza. A konstrukció érdekessége, hogy algebrai eszközöket, pontosabban véges testeket használ.

A [THRBW2011JLT] dolgozat egy kommunikációs mérnöki problémakörrel foglalkozik: hogyan találjuk meg és azonosítsuk optikai hálózatokban a meghibásodott éleket. Erre az utóbbi időben a kombinatorikus csoporttesztelés eszközeit használó megoldások születtek (jelentős részben Tapolcai, Ho és munkatársaik által). A jelen dolgozat egy heurisztikus, randomizált algoritmust (a GCS-módszer) mutat be, amellyel hatékony hibaazonosító kódok kaphatók egy sor érdekes és praktikus hálózat esetében.

A [THWR2012IEEE] és a [HTBSHR2012RNDM] dolgozatok az optikai (kommunikációs) hálózatok élhibáinak pontos detektálásával foglalkoznak. Alapvetően a kombinatorikus csoport-tesztelés módszereit terjesztjük ki gráfokra, ahol a teszthalmazokkal kapcsolatosan a kommunikációs alkalmazásból eredő strukturális követelmények is vannak (pl. a tesztgráfok összefüggőek, esetleg utak legyenek).

Az első dolgozatban azt a helyzetet vizsgáljuk, amikor a hálózat minden csúcsának képesnek kell lennie a hiba helyének a meghatározására - mégpedig pusztán a hozzá csatlakozó tesztekre alapozva. Alsó korlátok mellett konstrukciókat adunk néhány egyszerű topológiára (út, csillag, teljes gráf), általános gráfok kezelésére egy heurisztikus algoritmust javaslunk.

A második munkában vizsgált helyzetben nincs lokális előírás; elegendő, ha az összes teszt alapján megtalálható a hibás kapcsolat. Itt viszont azzal a megkötéssel élünk, hogy a tesztek korlátos hosszúságú utak.

Az ún. FDP-védelem (failure dependent protection) egyike a kapacitás szempontjából leghatékonyabb védelmi módszereknek az optikai hálózatok területén. Hátrányai viszont a meglehetősen hosszú helyreállítási idő és a viszonylag sok munkaüzenet. A [THBR2013TN] dolgozatban egy újszerű helyreállítási stratégiát körvonalazunk, ami a lehetővé teszi, hogy a kapcsolati hibákat tisztán az optikai szinten kezeljük. A felmerülő allokációs problémát az elméleti szempontból jól kezelhető és gyakorlati szempontból is érdekes cirkuláns hálózatok esetében vizsgáltuk meg részletesebben.

A [THBR2013INFOCOM] dolgozatban a fentebb megadott hálózati hibakereső feladatnak azt a (lokalizált) változatát vizsgáljuk, amikor minden csúcsnak csak egy adott sugarú környezetében kell képesnek lennie a hiba pontos felderítésére. Korlátokat és algoritmust adunk ebben az esetben is.

A Gauss-keverékeloszlásokkal való modellezés és a Fisher-információn alapuló távolság a keverékeken igen fontos eszközök a képeket osztályozó algoritmusok világában. Segítségükkel az utóbbi időben igen jó minőségű osztályozási eredmények születtek. A [DBR2013AU] dolgozatban áttekintettük a Fischer-mag módszerek elvi alapjait, rámutatva, hogy a segítségükkel természetes metrikát nyerhetünk a képeink felett. Észrevételeinket a Pascal VOC 2007 objektum-osztályozó verseny adatain végzett mérésekkel és számításokkal támasztottuk alá. Az eredményeket a [HTR2013DRCN] konferenciaelőadáson is ismertettük.

A korábban kidolgozott monitorozó utakon (m-trails) alapuló hibadetektáló módszerünknek a [THBR2013-IC] dolgozatban egy lokális változatára teszünk javaslatot. Az optikai hálózat minden v csúcsának adott egy környezete. Minden v csúcsnak a saját környezetében fellépő hibák azonosítására kell képesnek lennie. Ez a stratégia igen robusztus, elosztott hibavédelem esélyeit hordozza. Matematikai jellegű részeredmény a munkában a megoldás költségének a kombinatorikus csoportttesztelés eszközeivel való becslése.

A [TRH2013TC] dolgozat az optikai hálózatok egyszeres kapcsolati hibáinak (vagyis legfeljebb 1 hibás él van a hálózatban) felderítésével foglalkozik. A hibák jelzésére kétirányban bejárható monitorozó struktúrákat (bm-trail) használhatunk, amelyek jelzéseit egy központ gyűjti össze. A célunk ebben a munkában a szükséges struktúrák b számának a minimalizálása volt. Több érdekes hálózat esetén sikerült optimális (illetve majdnem optimális) b értéket elérni, hatékony kombinatorikai és algebrai konstrukciók alkalmazásával.

b) Félcsoportok, automaták, nyelvek

Egy félcsoport valamely kongruenciáját félháló-kongruenciának nevezzük, ha a szerinte vett faktorfélcsoport félháló, azaz olyan kommutatív félcsoport, amelyben minden elem idempotens. Ekkor a kongruenciaosztályok részfélcsoportok; ilyenkor azt is szoktuk mondani, hogy a félcsoport előáll ezen részfélcsoportok félhálójaként. Ha egy félcsoportnak csak az univerzális relációja az egyetlen félháló-kongruenciája, akkor a félcsoportot félháló-felbonthatatlannak mondjuk. Egy félcsoportot arkhimédeszi félcsoportnak nevezünk, ha bármely két elemét is tekintjük, mindkettő osztja a másik valamelyik hatványát. Közismert tény, hogy minden arkhimédeszi félcsoport félháló-felbonthatatlan. Azokat a félcsoportokat, amelyek arkhimédeszi félcsoportok félhálójaként állnak elő, Putcha-félcsoportoknak nevezzük. Az általunk folytatott kutatások speciális Putcha félcsoportokkal, véges test feletti félcsoportalgebrákkal, illetve tetszőleges félcsoportokban definiálható fogalmakkal kapcsolatosak.

Egy S félcsoportot R-kommutatív félcsoportnak nevezünk, ha tetszőleges a, b elemeihez megadható olyan $x \in S^1$ elem, melyre ab=bax teljesül. Egy félcsoportot GC-kommutatívnak nevezünk, ha teljesíti az $aba^2 =$

a^2ba azonosságot. Egy félcsoportot RGC-kommutatívnak nevezünk, ha R-kommutatív és GC-kommutatív. Egy félcsoportot jobb H-félcsoportnak nevezünk, ha minden jobb oldali kongruenciája kongruencia. Az [N2009SF] cikkben a szubdirekt irreducibilis RGC-kommutatív jobb H félcsoportok teljes leírása szerepel.

Egy félcsoportot permutálható félcsoportnak nevezünk, ha bármely két kongruenciája egymással felcserélhető. A [DN2010ASM] cikkben a véges permutálható Putcha félcsoportokkal foglalkozunk. Megállapítjuk ezek főbb típusait, s egyes esetekben teljes leírást adunk a cikkben definiált konstrukció segítségével.

Egy S félcsoport A részhalmazának szeparátorán értjük mindazon S-beli x elemek összeségét, melyekre $xA \subseteq A$, $Ax \subseteq A$, $x(S \setminus A) \subseteq S \setminus A$, $(S \setminus A)x \subseteq S \setminus A$ teljesül. Egy korábbi cikkünk alapján ismert, hogy egy részhalmaz szeparátora vagy üres vagy részfélcsoport. A [N2011SF] cikkben olyan félcsoportokkal foglalkozunk, melyekben a részhalmazok szeparátorára speciális feltételek teljesülnek. Például: minden részfélcsoport valamely részhalmaz szeparátora, vagy minden nem-üres részhalmaznak nem üres a szeparátora.

Legyen H csoportok egy varietása. Egy S félcsoport valamely α kongruenciáját LH-kongruenciának nevezzük, ha S minden olyan T-vel jelölt α-osztálya, amely részfélcsoport, tartalmaz idempotens elemet és az eTe részmonoid benne van H-ban minden T-beli e idempotens elem esetén. A [N2011IJA] cikkben speciális Putcha-félcsoportok esetén írjuk le a maximális LH-kongruenciákat.

Egy S félcsoportot bal reduktív félcsoportnak nevezünk, ha tetszőleges a és b elemei esetén abból a feltételből, hogy S minden x elemére $xa = xb$ teljesül az következik, hogy $a = b$. A bal reduktív félcsoportok a félcsoportok jobb reguláris reprezentációjában játszanak fontos szerepet. Egy félcsoport kongruenciájáról azt mondjuk, hogy bal reduktív, ha a szerinte vett faktorfélcsoport bal reduktív. Az [N2013SF] cikkben félcsoportok tetszőleges kongruenciájának bal reduktív lezártjával kapcsolatos vizsgálatokat végeztünk.

Az [N2013IJA] és az [NR2014IJCMS] cikkekben véges félcsoportok jobb reguláris mátrixreprezentációjával kapcsolatos eredmények szerepelnek. A [N2013IJA] cikkben véges félcsoport injektív jobb reguláris mátrixreprezentáció szerinti képének dimenzióját vizsgáljuk, az [NR2014IJCMS] cikkben pedig olyan S félcsoportok állnak a vizsgálat középpontjában, amelyek injektív jobb reguláris mátrixreprezentáció szerinti képe lineárisan független mátrixokból áll, vagy ami ezzel ekvivalens: az S félcsoport vizsgált test feletti félcsoportalgebrájában a jobb oldali annullátor csak a nullelemből áll.

Egy S félcsoportot gyengén exponenciálisnak nevezünk, ha tetszőleges $(a, b) \in S \times S$ elempárhoz és tetszőleges $m \geq 2$ pozitív egész számhoz megadható olyan k pozitív egész szám, melyre $(ab)^{m+k} = a^m b^m (ab)^k = (ab)^k a^m b^m$ teljesül. Egy félcsoportot Δ -félcsoportnak nevezünk, ha kongruenciahálója láncot alkot a tartalmazásra nézve. A "Weakly exponential Δ-semigroups" c. korábbi cikkben (Semigroup Forum, 40(1990), 297-313) megadtuk a gyengén exponenciális Δ-félcsoportokat, viszont az egyik típusra (illetve annak duálisára) nem sikerült példát konstruálni. A [N2013IJA] cikkben megmutattuk néhány speciális félcsoportosztályra, hogy bennük nincs példa, viszont az általános probléma még továbbra is megválaszolatlan.

Közismert tény, hogy ha egy S félcsoport beágyazható olyan félcsoportba, amely csoportok uniója, akkor S tetszőleges a, b elemei esetén az $a^2 = ab = b^2$ feltételből $a = b$ következik. Az ilyen félcsoportot gyengén szeparatív félcsoportnak nevezzük. Egy S félcsoportot gyengén kommutatív félcsoportnak nevezünk, ha tetszőleges S-beli a és b elemekhez megadhatók olyan S^1-beli x és y elemek, hogy $(ab)^n = bx = ya$ teljesül valamely pozitív egész n hatványra. A cikkben megmutatjuk, hogy egy gyengén kommutatív S félcsoport akkor és csak akkor gyengén szeparatív, ha S_α arkhimédeszi komponensei gyengén egyszerűsítésesek, azaz tetszőleges S_α-beli a, b, x elemek esetén az $ax = bx$ és $xa = xb$ feltételek együttes teljesüléséből $a = b$ következik.

A [SYRK2011ICSC] konferenciacikk a Wikipédia szerkesztői közti konfliktusok "edit wars" automatikus detektálásával és jellemzésével foglalkozik.

A [K2012FGC] konferenciacikkben olyan igéket vizsgálunk, melyeknek aritása magasabb, például az ad vagy igér. Azt vizsgáljuk algebrai módszerekkel, hogy ezen igék hogyan írhatók le egy és 2-változós relációkkal.

A [KRZs2013MLW] konferencia közleményben egy olyan eszközláncot írunk le, melynek segítségével automatikusan lehet gyakorisági szótárat generálni 100+ nyelvre.

A [K2014AAAI] konferencia közleményben bevezetjük az euklideszi automatát, mely a véges állapotú automaták általánosítása.

A [B2011BME] dolgozat az "Algebrai Automataelmélet" c. elektronikus jegyzet (375 oldal) elérhető a http://tankonyvtar.ttk.bme.hu/pdf/18.pdf honlapon. Ennek 5. fejezetében (192-259 oldal) a szerző néhány speciális automataosztállyal részletesebben foglalkozik. Itt a szerző saját eredményei is szerepelnek, melyek ebben a formában jelennek meg először magyarul. A vizsgált automataosztályok a következők: ciklikus automaták, erősen összefüggő automaták, kommutatív automaták, egyszerű automaták, állapotfüggetlen automaták, félperfekt automaták, perfekt automaták, irányítható automaták, nilpotens és definit automaták, összefüggő automaták és rektraktálható automaták. .

c) A számítástudomány logikai és számelméleti alapjai

Általános kérdés: Adott egy B σ-irányított analitikus parciálisan rendezett halmaz. Előírható-e izomorfia erejéig kofinális része "szép" generikus bővítésben? Precízebben: Igaz-e, hogy minden σ-irányított Q parciálisan rendezett halmazhoz van olyan megszámlálható antilánc-feltételt kielégítő kényszerképzet mellyel bővítve Q izomorf B egy kofinális részével.

Hechler eredeti tétele pozitív választ ad a kérdésre, ha B a természetes számokból álló végtelen sorozatok halmaza a majdnem mindenhol dominálással parciálisan rendezve. T. Bartoszynski és M. Kada igazolta a tételt a meager halmazok ideáljára (a tartalmazással parciálisan rendezve); M.R. Burke és M. Kada pedig a null-mértékű halmazok ideáljára. A [F2011JSL] dolgozatban pozitív választ adtunk minden sűrű analitikus P-ideál esetében (parciálisan rendezve a majdnem tartalmazással).

Ezen tételek egy érdekes alkalmazása, hogy minden valós számhoz van olyan megszámlálható antilánc-feltételes generikus bővítés, melyben az adott szám elsőrendben definiálható.

A [BF2012JSL] cikkben a természetes számokon adott ideálok családján értelmezett parciális rendezések segítségével természetes módon lehet számosságinvariánsokat rendelni az ideálokhoz. Ezt vizsgáltuk meg a Katetov, a Katetov-Blass és az 1-1 rendezés esetén. A Katetov-rendezés esetén ezeket az invariánsokat topológiailag is karakterizáltuk a Frechet-Urysohn tulajdonság idealizált verziója segítségével. A nulla sűrűségű halmazok ideálja esetében ezt az invariánst karakterizáltuk a váges tartójú valószínűségi mértékek terén adott gyenge* konvergencia segítségével is.

Ezen invariánsokat összehasonlítottuk ismert invariánssokkal, külön megvizsgáltuk a viselkedésüket a Cohen-modellben, és további forszolási kérdésekkel is foglalkoztunk.

Elekes Márton tétele szerint a valós számegyenes minden mérhető halmazokkal történő, a természetes számokkal indexelt végtelen vastag fedésének létezik olyan részsorozata, ami majdnem mindenkit végtelen vastagon fed és az indexhalmaz nulla sűrűségű. Ennek felhasználásával egy új és elegáns bizonyítást adott a nulla sűrűségű halmazok ideáljának random-lerombolhatatlanságára. Cikkében kérdésként felvetette a tétel és alkalmazásának lehetséges általánosításait.

Cikkünkben pár negatív példa után pozitív eredményeket láttunk be az első-kategóriájú esetben, amikor a keresett részsorozat indexhalmazának egy előre rögzített, a természetes számokon adott ideálban kell lennie. Bevezettük (A, I) alakú párok J-fedési tulajdonságát, ahol A egy σ-algebra és I egy ideál A alaphalmazán. Általánosítottuk az Elekes M. által felfedezett kapcsolatot a fedési tulajdonság és a forszolás-lerombolhatatlanság között.

Beláttuk, hogy bizonyos "szép" ideálok esetében, ha nem teljesül egy fedési tulajdonság, akkor az automatikusan "nagyon" hamis.

Megvizsgáltuk továbbá szorzattereken adott Fubini-szorzatként előálló ideálok fedési tulajdonságait, és a természetes számokon adott ideálok fedési tulajdonságait.

A "summable" ideálok definíciója értelemszerűen általánosítható tetszőleges topologikus Abel-csoportbeli sorozatra. A [BF2014pr] benyújtott cikkünkben a lengyel csoportok, de főleg a Banach terek esetét vizsgáljuk. A következő eredményeket kaptuk: (a) Pontosan az analitikus P-ideálok reprezentálhatók valamely lengyel csoportban. (b) Pontosan a nem patologikus analitikus P-ideálok reprezentálhatók valamely Banach térben. (c) Példákat adtunk c_0-ban nem reprezentálható nem patologikus analitikus P-ideálokra illetve ilyen ideálok nagyobb családjaira.

A [KSR2014BAMS] cikknek a fő eredménye az, hogy meghatározzuk azokat a természetes számokból álló halmazokat, amelyekhez tartozó háromtagú reprezentációfüggvények megegyeznek valahonnan kezdve. Ezen kívül több hasonló problémát is vizsgálunk a cikkben.

A [KSR2014AApr] cikkben igazoljuk olyan Sidon-sorozat létezését, amely negyedrendű aszimptotikus bázis. A dolgozat be van nyújtvaaz Acta Arithmetica c. folyóirathoz.

A [KSR2014JNT] cikkben igazoljuk Chen és Fang egy sejtését additív komplementumokról.

A [KSR2014PMpr] cikkben véges Abel-csoportokhoz tartozó kéttagú reprezentációfüggvények megegyezését vizsgáljuk. A dolgozat be van nyújtva a Publicationes Mathematicae c. folyóirathoz.

A [K2014pr] cikkben bizonyos általánosított h-Sidon-sorozatok létezését igazoljuk, amelyek k-ad rendű aszimptotikus bázisok minden $3 < h < k$ - ra. A dolgozat preprint formájában elérhető a
http://www.cs.elte.hu/ kisspest/publ.html honlapon.

A [KMT2014TCSpr] cikknek a fő eredménye az, hogy ha létezik gyorsan konvergáló Markov - lánc a sima kötés-vágás problémára, akkor $RP = NP$. Valójában ennél általánosabb tételt bizonyítunk. A dolgozat be van nyújtva a Theoretical Computer Science c. folyóirathoz.

A [EKMS2014EJCSpr] cikkben olyan páros gráfokat vizsgálunk, amelyekből kizárunk egy csillagot es egy 1-faktort. Megmutatjuk, hogy ezen az állapottéren bolyongó swap - Markov - lánc gyorsan konvergál. A dolgozat be van nyújtva az Electronic Journal of Combinatroics c. folyóirathoz.