Az OTKA K77432 pályázatban elért eredmények rövid ismertetése

2013. április 24.

A pályázat résztvevői együtt is és külön-külön is értek el eredményeket; túlnyomórészt a hálóelmélet, és nyomokban (a hálóelmélethez szorosan kapcsolódó) univerzális algebra területén. Az elért eredményekből **32 tudományos cikk** készült. Ezen cikkek közül **20 már megjelent** (16 papíron, 4 pedig folyóiratok honlapján „on-line"), további kettőt közlésre elfogadtak, a maradék 10 pedig közlésre benyújtott stádiumban van. A megjelent cikkek közül **14 a hálóelmélet két vezető folyóiratában** jelent meg: 9 az Algebra Universalis, 5 pedig az Order folyóirat hasábjain. A 32 cikkből **5 a pályázatban résztvevők közös munkája**. Az elért eredmények és az azokból írt cikkek mennyisége **messze meghaladja a munkatervbeli célkitűzést**, amely négy évre 7 cikket írt elő.

Az elért eredményeket öt fő témakörre bontva, a cikkek mentén haladva tekintjük át.

I. FÉLIGMODULÁRIS HÁLÓK ÉS KONGRUENCIÁIK

A véges féligmoduláris hálókra vonatkozó 2008-ban megjelent struktúratételt terjeszti ki a [Czédli and Schmidt: Some results on semimodular lattices] cikk: ha L féligmoduláris háló, amelyben minden intervallum véges hosszúságú, akkor L egy alkalmas, ugyanilyen tulajdonságú disztributív háló fedésőrző egyesítéshomomorf képe. (Ezen új tételt leszámítva a cikk főleg áttekintő jellegű.)

A [Schmidt: Rectangular hulls of semimodular lattices] cikk azt bizonyítja, hogy tetszőleges L véges féligmoduláris háló fedésőrző módon beágyazható egy olyan R véges féligmoduláris hálóba, amelyre $J(R)$ ugyanolyan széles mint $J(L)$, de $J(R)$ láncok kardinális összege. Ez a tétel Grätzer és Knapp 2008-ban publikált eredményét általánosítja (2-szélességről tetszőleges szélességre.)

Két hálóból Hall—Dilworth-ragasztással új hálót nyerhetünk. Ezt a konstrukciót általánosítja a [Schmidt: Semimodular lattices and the Hall-Dilworth gluing construction] cikk oly módon, hogy az új konstrukcióban ideál helyett maximális lánc szerepel, amely egyúttal filter a másik hálóban. A cikk fő eredménye szerint véges hosszúságú féligmoduláris esetben bármely ilyen konstrukció egy alkalmas Hall—Dilworth-ragasztás egyesítéshomomorf képe, és következésképpen megőrzi a féligmodularitást.

Ismeretes, hogy bármely L véges féligmoduláris háló fedésőrzően beágyazható egy K egyszerű geometriai hálóba. Ennél sokkal erősebb állítást bizonyít a [Schmidt: Congruence lattices and cover-preserving embeddings of finite length semimodular lattices] cikk: K egyszerűsége helyett az is elérhető, hogy $\mathrm{Con}(K)$ a $\mathrm{Con}(L)$ tetszőleges, előre megadott $\{0,1\}$-részhálója legyen.

Az előző tételt általánosítja a [Czédli: Representing homomorphisms of distributive lattices as restrictions of congruences of rectangular lattices] cikk az alábbi módon. Legyen f egy $\{0,1\}$-őrző hálóhomorfizmus egy D véges disztributív hálóból egy téglalapszerű (tehát egyúttal véges, planáris, féligmoduláris) L háló kongruenciahálójába. A cikkbeli új tétel szerint L kiterjeszthető egy olyan K téglalapszerű hálóvá, amelynek L filtere, a $\mathrm{Con}(K)$ kongruenciaháló izomorf D-vel, és f-et a megszorítás, mint $\mathrm{Con}(K)$-ból $\mathrm{Con}(L)$-be menő leképezés reprezentálja. Innen az is következi, hogy két véges disztributív háló közötti $\{0,1\}$-

homomorfizmus mindig reprezentálható, mint egy téglalapszerű háló kongruenciahálójának megszorítása egy téglalapszerű filter kongruenciahálójába.

II. PLANÁRIS FÉLIGMODULÁRIS HÁLÓK

A pályázat egyik fő eredménye a [Czédli and Schmidt: The Jordan-Hölder theorem with uniqueness for groups and semimodular lattices] cikkbeli tétel, amely szerint a Jordan—Hölder-tételben szereplő párosítás egyértelmű, ha a faktorcsoportok közötti izomorfiát az I. izomorfiatételnek egy lefelé és egy felfelé történő alkalmazásának egymásutánja adja. Érdemes rámutatni arra, hogy itt egy klasszikus, egyáltalán nem hálóelméleti kérdéskört gazdagítunk hálóelméleti módszerek felhasználásával. A cikkben a fő szerepet planáris féligmoduláris hálók (azokon belül is a sovány féligmoduláris hálók) játszák. Részben ezen cikk hatására vált intenzívebbé a sovány féligmoduláris hálók szerkezetének feltérképezése.

A [Czédli and Schmidt: Slim semimodular lattices. I. A visual approach] cikkben kétféle szemléletes rekurzióval is megkonstruáljuk a sovány féligmoduláris hálók diagramjait. (Egy háló sovány, ha egyrészt véges, és másrészt egyesítésirreducibilis elemei két lánccal lefedhetők.) Ezen diagramokból az összes planáris féligmoduláris hálódiagram már könnyen megkapható.

Míg a fenti cikkben elemek hozzáadásával kapjuk a sovány féligmoduláris hálókat rácsból (azaz két lánc direkt szorzatából) kiindulva, a [Czédli and Grätzer: Notes on planar semimodular lattices. VII. Resections of planar semimodular lattice] cikkben – szintén rácsból kiindulva – elemek elhagyásával érjük el ugyanezt.

A [Czédli: The matrix of a slim semimodular lattice] cikkben mátrixokkal (és nagyon kevés adattal) írjuk le a sovány féligmoduláris hálókat.

A fenti leírást felhasználva a [Czédli, Ozsvárt and Udvari: How many ways can two composition series intersect?] cikkben megszámolja ezen hálókat a hosszúság függvényében (aszimptotikus, illetve rekurzív képletet adva), és egyúttal arra a kérdésre is választ ad, hogy véges csoport két kompozícióláncának tagjai – a rendezés tekintetében – hányféleképpen metszhetik egymást.

A [Czédli and Schmidt: Composition series in groups and the structure of slim semimodular lattices] cikk fő eredménye szerint egy n hosszúságú sovány féligmoduláris háló leírható egyetlenegy permutációval, amely az $\{1,2,\ldots,n\}$ halmazon hat. A cikk azt is leírja, hogy két permutáció mikor határozza meg (izomorfia erejéig) ugyanazt a hálót. Kiderül a cikkből az is, hogy ezek a hálók pontosan azon hálók duálisai, amelyeket véges csoport két kompozícióláncából kapunk úgy, hogy vesszük a láncokban szereplő részcsoportok metszeteként előálló részcsoportok hálóját a tartalmazásra nézve.

A [Czédli and Schmidt: Slim semimodular lattices. II. A description by patchwork systems] cikkben a klasszikus Herrmann-féle S-ragasztott konstrukció megfelelőjét adjuk meg ragasztott-összeg-felbonthatatlan planáris féligmoduláris hálókra. Közben struktúratételt adunk a Hall--Dilworth-ragasztásra nézve felbonthatatlan planáris féligmoduláris hálókra is.

A [Czédli, Dékány, Ozsvárt, Szakács and Udvari: On the number of slim, semimodular lattices] cikkben az adott elemszámú sovány féligmoduláris hálók számára adunk rekurzív képletet.

A [Czédli: The asymptotic number of planar, slim, semimodular lattice diagrams] cikkben az adott n elemszámú sovány féligmoduláris hálódiagramokat számoljuk meg aszimptotikusan, a hasonló diagramokat azonosnak tekintve. A cikkbeli tétel szerint ez a szám aszimptotikusan konstanszor 2 az n-ediken.

Kelly és Rival eredménye szerint egy planáris hálódiagram esetén ha u és v összehasonlíthatatlan elemek és u legalább egy v-n átmenő maximális lánc bal oldalán van, akkor az összes ilyen lánc bal oldalán van. A hasonló tulajdonságú (más szóval a legfeljebb 2 rendezésdimenziójú) részbenrendezett halmazokat kváziplanárisnak elnevezve a [G. Czédli: Quasiplanar diagrams and slim semimodular lattices] cikk természetes bijekciót ad a korlátos kváziplanáris részbenrendezett halmazok és a sovány féligmoduláris hálódiagramok között. Ez az eredmény a korlátos kváziplanáris diagramok jobb megértéséhez vezet, hiszen a sovány féligmoduláris hálódiagramokra a korábban említett cikkekben számos jellemzés született.

III. KONVEXITÁS HÁLÓELMÉLETI (ÉS UNIVERZÁLIS ALGEBRAI) NÉZŐPONTBÓL

A [Czédli and Romanowska: An algebraic closure for barycentric algebras and convex sets] cikkbeli tétel – teljesen általános feltételek mellett, a baricentrikus algebrák nyelvén – a konvex testek topologikus lezárását algebrai módon jellemzi. Ennek a cikknek az alábbi két közvetlen folyatása született.

Egyrészt a [Czédli and Romanowska: Generalized convexity and closure conditions] cikkben speciális (az euklidészi térhez jobban kötődő) esetben egyszerűbb eszközökkel igazoljuk a fenti cikk eredményét, és további eredményeket is nyerünk.

Másrészt, tekintsük a $\mathbf{Q}^n$ racionális n-dimenziós affin tér azon részhalmazait, amelyek valós konvex halmazok $\mathbf{Q}^n$-nel vett metszetei. A [Czédli, Maróti and Romanowska: A dyadic view of rational convex sets] cikk fő eredménye szerint két ilyen részhalmaz (bizonyos feltételek esetén, pl. ha mindkettő korlátos) pontosan akkor izomorf grupoid (a számtani közép műveletével), ha a tér egy nemelfajuló affin transzformációja az egyiket a másikba viszi.

A konvexitás kulcsfontosságú szerepet játszik a sovány féligmoduláris hálókkal kapcsolatos eredmények továbbfejlesztése szempontjából. A sovány féligmoduláris hálók ugyanis nem mások, mint a 2 konvex dimenziójú véges konvex geometriák (mint kombinatorikus struktúrák) altérhálóinak duálisai. Ha ejtjük a konvex dimenzióra való megkötést, akkor az úgynevezett egyesítésdisztributív hálók fogalmához jutunk. Ezen hálókra legalább egy tucat ekvivalens definíció létezik; a legelső Dilworth-től származik 1940-ből. Az egyesítésdisztributív hálók az antimatroidok elérhető halmazainak hálói, vagy a konvex geometriák altérhálóinak duálisai. A [Czédli: Coordinatization of join-distributive lattices] cikk tétele szerint ezek a hálók permutációkból álló vektorok segítségével „koordinátázhatók”; ez a tétel a sovány féligmoduláris hálók korábban említett permutációs leírását általánosítja.

Az [Adaricheva and Czédli: Notes on the description of join-distributive lattices by permutations] cikk rámutat arra, hogy a fent említett koordinátázás – egy kis munka árán – Edelman és Jamison 1985-ös konvex geometriákra vonatkozó eredményéből is megkapható. Ugyanakkor a fordított irány is kiderül: az Edelman—Jamison-eredmény is következik a friss hálóelméleti koordinátázási eredményből. Ily módon új, hálóelméleti bizonyítást nyerünk az Edelman—Jamison-eredményre. Továbbá az egyesítésdisztributív hálók újabb ekvivalens definíciójához jutunk, amelyik a trajektóriák fogalmára épít.

Ha a síkon véges sok kört tekintünk, akkor ezek halmazán a szokásos konvex burok képzéssel egy konvex geometriát (mint kombinatorikai struktúrát) nyerünk. A [Czédli: Finite convex geometries of circles] szerint minden olyan véges konvex geometria, amelynek konvex dimenziója legfeljebb 2, ily módon reprezentálható. A bizonyítás döntően hálóelméleti, és a sovány féligmoduláris hálókra vonatkozó (jelen projektben kifejlesztett) eszköztárat használja.

IV. HÁLÓTOLERANCIÁKHOZ HASONLÓ TULAJDONSÁGÚ TOLERANCIÁK

1982 óta mostanáig csak a hálók varietásáról tudtuk, hogy ott a toleranciák "érdekesek" abban az értelemben, hogy egyrészt ebben a varietásban lehet tolerancia szerinti faktoralgebrát képezni úgy, hogy az is a varietáson belül maradjon, és másrészt vannak kongruenciáktól különböző toleranciák is. A [Chajda, Czédli and Halas: Independent joins of tolerance factorable varieties] cikk végtelen sok további hasonló varietásra ad példát.

A [Czédli and Grätzer: Lattice tolerances and congruences] cikk eredménye szerint a hálók toleranciái nem mások, mint a hálók kongruenciáinak homomorf képei.

Egy s=t azonosságot (ahol s és t kifejezés) lineárisnak nevezünk, ha bármely változó s-ben is és t-ben is legfeljebb egyszer lép fel. Az előbb említett két cikkhez kapcsolódva a [Chajda, Czédli, Halas and Lipparini: Tolerances as images of congruences in varieties defined by linear identities] cikk bebizonyítja, hogy ha $\boldsymbol{V}$ egy lineáris azonosságokkal definiált varietás, akkor bármely $\boldsymbol{V}$ -beli A algebra és az A tetszőleges T toleranciája esetén van olyan $\boldsymbol{V}$ -beli B algebra és B-nek egy szürjektív homomorfizmusa A-ra, hogy T a B egy alkalmas kongruenciájának képe ezen homomorfizmus mellett.

Az előbbi cikkben említett varietástulajdonságot (azaz, hogy egy varietásban a toleranciák a varietás kongruenciáinak homomorf képei) a [Czédli and Kiss: Varieties whose tolerances are homomorphic images of their congruences] cikk Malcev-szerű feltétellel jellemezi. Ezen feltétel alkalmazásaként könnyen adódik, hogy a félhálók varietása és az unér varietások rendelkeznek a tekintett tulajdonsággal; továbbá (nem olyan könnyen adódóan) az n-felcserélhető kongruenciákkal bíró varietások közül pontosan a kongruencia-felcserélhetőek ilyen tulajdonságúak.

Legyen D véges disztributív háló, T a fedési reláció által generált toleranciája, $S(D)$ pedig a D/T faktorháló (a témavezető 1982-es definíciója értelmében). Ekvivalens tálalásban: legyen $S(D)$ a D Herrmann-féle S-ragasztott váza („skeleton”). A [Czédli, J. Grygiel and K. Grygiel: Distributive lattices determined by weighted double skeletons] cikk tétele szerint ha az $S(S(D))$ második váz triviális (azaz egyelemű), akkor D-t az úgynevezett súlyozott dupla váz meghatározza. (Esetenként így lehet D-t a legkevesebb adattal megadni.) Az eredmény éles abból a szempontból, hogy minden egyes *D*-re valahányadik váz triviális, de a harmadik váz trivialitásából még nem következik az, hogy *D*-t a súlyozott dupla váz meghatározza.

V. TOVÁBBI HÁLÓELMÉLETI EREDMÉNYEK

Hálók összegének képzésén (Graczynska, majd Graczynska és Grätzer nyomán) lényegében azt értjük, hogy a faktorhálóból és a kongruencia blokkjaiból állítjuk elő a hálót. A szituációt korábban két funktor írta le. Ennél jóval könnyebben kezelhető, a lényeget jobban feltárja és szemléletesebb is a [Czédli: Sums of lattices and a relational category] cikkbeli megközelítés, ahol csak egyetlen funktorra van szükség. Ez a funktor (mondjuk, véges esetben) a faktorhálóból (mint kis kategóriából) a véges hálók azon kategóriájába képez, ahol a morfizmusok bizonyos relációk. A fellépő relációk szemléletesen két háló egymás fölé helyezését írják le.

A [Czédli and Skublics: The ring of an outer von Neumann frame in modular lattices] cikkben a szerzők a következő tételt igazolják. Legyen *f* egy moduláris háló Neumann-féle *n*-kerete (az ún. "külső keret"), és tegyük fel, hogy ezen *n*-keret egyik prímintervallumába egy *g* feszítő *m*-keret van elhelyezve (ez az ún. „belső” keret). Ez esetben a külső keret koordináta gyűrűje (izomorfia erejéig) éppen a belső keret koordináta gyűrűje feletti *n*-szer *n*-es mátrixgyűrű. (Korábban csak az volt ismeretes, hogy a két gyűrű azonos karakterisztikájú).

Egy véges *P* részbenrendezett halmaz négy természetesen felmerülő relációval is definiálható: a „kisebb”, a „kisebb vagy egyenlő”, a „követi”, vagy a „követi vagy egyenlő” relációval. Mind a négy esetben a [Czédli: Some new closures on orders] cikk meghatározza azon *P*-ket, amelyeken a tekintett reláció ugyanazt (a szerző által korábban bevezetett) erős lezárást indukálja, mint a reláció által meghatározott Galois-féle lezárás. (A hálóelmélethez a részbenrendezett halmazok is és a lezárások is szorosan kapcsolódnak.)

Ha egy hálón adott egy véges rendű hálóautomorfizmus, mint unér művelet, akkor forgáshálóról beszélünk. Speciális esetet jelentenek az involúcióval felszerelt hálók, amelyekkel több szerző is foglalkozott korábban, többek között a témavezető is a kilencvenes években. A [Czédli and Nagy: Varieties of distributive rotational lattices] cikk meghatározza a szubdirekt irreducibilis disztributív forgáshálókat, továbbá leírja a disztributív forgáshálókból álló varietásokat.