Szakmai Záróbeszámoló
Lie csoportok és nem asszociatív struktúrák című pályázathoz
OTKA azonosító: PD 77392, Vezető kutató: Figula Ágota

A pályázat záróbeszámolójában a projekt támogatásával készült tudományos dolgozatok eredményeit szeretném összefoglalni.
[1] Ágota Figula, Karl Strambach: Subloop incompatible Bol loops, Manuscr. Math. Vol. 130, No. 2, 183-199, 2009.
[2] Ágota Figula: Topological loops with three-dimensional solvable left translation group, Aequationes Math. Vol. 79, 83-97, 2010.
[3] Ágota Figula: Three-dimensional loops as sections in a four-dimensional solvable Lie group, Proc. of the Conference Iscia Group Theory, Iscia, Italy, 14-17 April 2010, World Scientific Publishing, 146-158, 2012.
[4] Ágota Figula: On the multiplication group of three-dimensional topological loops, J. Lie Theory Vol. 21, 385-415, 2011.
[5] Ágota Figula, Karl Strambach: Extensions of groups by weighted Steiner loops, Results Math. Vol. 59, 251-278, 2011.
[6] Ágota Figula: Three-dimensional topological loops with solvable multiplication groups, accepted for publication Comm. in Algebra, pp. 28, 2012.
[7] Ágota Figula: The multiplication groups of topological loops, Proc. of the International Conference Modern Algebra and its Applications, Batumi, Georgia, 19-25 Sept 2011. Georgian Technical University, 2011, 90-96. ISBN 978-9941-0-3726-9, submitted in J. Math. Sci.
[8] Ágota Figula: Quasi-simple Lie groups of dimension ≤ 8 are not multiplication groups of topological loops, 2012, pp. 20, http://www.math.klte.hu/figula/publikaciok.html. manuscript
[9] Giovanni Falcone, Ágota Figula, Karl Strambach: Multiplicative loops of quasifields with large kernel, 2012, pp. 15, http://www.math.klte.hu/figula/publikaciok.html. manuscript

A pályázat támogatásával a következő konferenciákon vehettem részt, tartottam előadást vagy poszter reprezentációt:
1) Iscia Group Theory konferencia, Iscia, 2010. április 13-18. Poszter: The multiplication group of two-dimensional topological loops.
2) Groups and topological groups, Tübingen, 2010. június 18-19. Előadás: Extensions of groups by weighted Steiner loops.
3) Bolyai János Emlék konferencia, Budapest, 2010.08.30-09.03. Előadás: Multiplication groups of three-dimensional topological loops.
4) 5th Bilateral Workshop on Differential Geometry and its Applications, Debrecen, 2010. szeptember 17-18. Előadás: Multiplication groups of three-dimensional topological loops.
5) Groups and topological groups, Wien, 2010. december 10-11. Előadás: Topological loops and their multiplication groups.
6) 36. Arbeitstagung über Algebra und Geometrie, Berlin, 2011. május 15-19. Előadás: Extensions of groups by weighted Steiner loops.

7) Finite Groups and Their Automorphisms, Istanbul, 2011. június 7-10. Poszter: Extensions of groups by weighted Steiner loops.
8) Groups and Topology groups, Usti nad Labem, 2011. június 24-25. Előadás: Extensions of groups by weighted Steiner loops.
9) Loops 2011, Trest (Czeck Republic), 2011. július 24-28. Előadás: Extensions of groups by weighted Steiner loops.
10) Abstract Algebra and Algorithms, Eger, 2011. augusztus 14-17. Előadás: Multiplication groups of topological loops.
11) International Conference Modern Algebra and its Applications, Batumi (Georgia), 2011. szeptember 19-25. Előadás: The multiplication groups of topological loops.
12) 7th Bilateral Workshop on Differential Geometry and its Applications, Ostrava, 2011. október 28-30. Előadás: The multiplication groups of topological loops.
13) Groups and Topological groups, Würzburg, 2011.12.09-10. Előadás: Multiplicative loops of quasifields with large kernel.
14) 9th Joint Conference on Mathematics and Computer Science, Siófok, 2012.02.09-12. Előadás: Multiplicative loops of quasifields with large kernel.
15) Iscia Group Theory konferencia, Iscia, 2012.március 26-29. Poszter: The multiplication groups of topological loops.
16) Groups and Topological groups, Wien, 2012.07.06-07. Előadás címe: Multiplication groups of low dimensional topological loops.

A pályázatban egységelemes L kvázicsoportok, röviden hurkok, vizsgálatával foglalkoztam. Egy L hurok bal oldali $\lambda_a : x \mapsto ax : L \to L$ és jobb oldali $\rho_a : x \mapsto xa : L \to L$, $a \in L$, szorzásai permutációi L-nek. Az L hurok összes bal és jobb oldali szorzásai által generált csoportot a hurok kétoldali szorzáscsoportjának nevezzük és $Mult(L)$-lel jelöljük. Az összes bal oldali, illetve az összes jobb oldali szorzások által generált részcsoportjait $Mult(L)$-nek, bal szorzáscsoportnak, illetve jobb szorzáscsoportnak nevezzük és G_l, illetve G_r-rel jelöljük. A vizsgálatokban kitüntetett szerepet játszik az a részcsoportja $Mult(L)$-nek, illetve G_l-nek, mely az L hurok egységelemének a stabilizátora a $Mult(L)$, illetve a G_l csoportban. Ezt a részcsoportot $Inn(L)$-lel, illetve H-val fogjuk jelölni. Az egy-, illetve kétoldali szorzáscsoportok vizsgálata összekapcsolja a hurkok elméletét a csoportelmélettel, és igen hatékony eszközök a hurkok szerkezetének meghatározásában. Ugyanis az L hurok normális részhurok struktúráját meghatározza a $Mult(L)$ szorzáscsoport normálosztó struktúrája és fordítva. Ezért lényeges feladat azon csoportok osztályozása, melyek előállnak hurkok szorzáscsoportjaként. Ez a probléma csoportok speciális transzverzálisainak meghatározását jelenti.

Nagy P.T. és K. Strambach hurokelméleti kutatásaihoz kapcsolódva olyan topologikus, ill. differenciálható hurkok vizsgálatával foglalkozom, ahol a G_l

csoport (véges dimenziós) Lie csoport. Ekkor a hurkok meghatározása ekvivalens a G_l Lie csoport erősen tranzitív transzverzálisainak megkeresésével. Ez azt jelenti, hogy meghatározzuk azokat az A transzverzálisait G_l-nek, melyek előállnak valamely $\sigma : G_l/H \to G_l$ folytonos, ill. differenciálható szelés képeként úgy, hogy H nem tartalmaz triviálistól különböző normálosztóját G_l-nek, A generálja G_l-t és erősen tranzitívan hat G_l/H-n, azaz adott gH és kH mellékosztályok esetén pontosan egy $z \in A$ elem létezik úgy, hogy $zgH = kH$ teljesül.

Kevés kivételtől eltekintve minden Lie csoportnak létezik erősen tranzitív transzverzálisa. Ezt az észrevételt alátámasztják az [1], [2], [3], [4] dolgozatok és a [6] dolgozat 10. tételének eredményei, ahol azokat az alacsony dimenziós összefüggő topologikus hurkokat osztályozzuk, melyeknek az [1] dolgozatban félig-egyszerű, a továbbiakban pedig felodható Lie csoport a bal szorzáscsoportja. Ezzel szemben az a feltétel, hogy topologikus hurkok kétoldali szorzáscsoportjai (véges dimenziós) K Lie csoportok, erős megszorítást ad mind a hurok mind a szorzáscsoport struktúrájára. Ez pontosan akkor teljesül, ha létezik két speciális transzverzális K-ban egy S részcsoportra vonatkozóan úgy, hogy S nem tartalmaz triviálistól különböző normálosztóját K-nak. Így S a hurok egységelemének a stabilizátora lesz K-ban. Az A és B transzverzálisokra annak a feltételnek kell teljesülnie, hogy A és B generálja K-t és $a^{-1}b^{-1}ab \in S$ igaz minden $a \in A$, $b \in B$ esetén. Ekkor az A és B transzverzálisokat S-összefüggőnek nevezzük. Véges csoportok esetén a $Mult(L)$ csoport, az $Inn(L)$ részcsoport és az A és B transzverzálisok fontosságát Csörgő P., A. Drapal, T. Kepka, Nagy G. P., M. Niemenmaa, A. Vesanen eredményei igazolják.

A kutatás nagy részében azoknak a Lie csoportoknak a meghatározását és szerkezetének vizsgálatát végeztük, melyek előállnak topologikus L hurkok kétoldali, ill. baloldali szorzáscsoportjaként. A $Mult(L)$ csoport ismeretében leírtuk az L hurok szerkezetét és megadtuk egységelemének stabilizátorát.

A legtöbb ismert egyszerű Bol huroknak, mely nem Bruck hurok, a létezése azon a tényen alapszik, hogy egy G csoport V szimmetrikus terének elmozdulásai a $G \times G$ csoportot generálják és $V = \{(x, x^{-1}); x \in G\}$. Legyen $G = G_1 \times G_2$, ahol $G_1 \cong G_2$ egy egyszerű csoport és legyen $\rho : G_1 \to G_2$ egy izomorfizmus. Legyen $S_1 < G_1$ és $S_2 < G_2$ nem triviális valódi részcsoportjai G_i-nek úgy, hogy $\rho^{-1}(S_2)S_1 = G_1$ és $\rho^{-1}(S_2) \cap S_1 = 1$. Ha $\rho^{-1}(S_2)\backslash\{1\}$ egyetlen eleme sem konjugált S_1 valamely eleméhez, akkor a $G_1 \times G_2/S_1 \times S_2$ faktor téren egy L egyszerű Bol hurok definiálható. Ez az L hurok egy S_1-lel izomorf és egy S_2-vel izomorf csoportnak a szorzata. Az [1] dolgozatban Karl Strambachal közösen osztályoztuk azokat a differenciálható Bol hurkokat, melyekre a G-csoport összefüggő nem-kompakt egyszerű Lie csoport. Az osztályozás a G csoportok, olyan zárt részcsoportokra való felbontásainak meghatározásán alapszik, melyek metszete triviális. R.O. Nazaryan eredményéből tudjuk, hogy sok klasszikus Lie csoportnak létezik az Iwasawa felbontástól különböző felbontása. Az ezekhez tartozó egyszerű

Bol hurkoknak van egy kompakt összefüggő részcsoportjuk és így nem homeomorfak $\mathbb{R}^n$-hez. Azt az ötletet, hogy egy egyszerű Bol huroknak a bal szorzáscsoportja lehet a $G \times G$ direkt szorzat Nagy G. P. fedezte fel.

A [2] dolgozatban azokat az összefüggő, topologikus hurkokat határoztuk meg, melyeknek a bal szorzáscsoportja 3-dimenziós feloldható Lie csoport. Ezek a hurkok kétdimenziósak, feloldhatóak és egyértelműen megadhatók egy legfeljebb kétváltozós folytonos függvénnyel. A 3-dimenziós Lie csoportok közül az euklideszi sík mozgáscsoportja, az euklideszi sík dilatációinak a csoportja és a kompakt Lie csoport kivételével minden Lie csoportnak van erősen tranzitív transzverzálisa, de ezen csoportok egyike sem lehet hurkok kétoldali szorzáscsoportja. Meglepő eredmény, hogy a 3-dimenziós feloldható nem-nilpotens Lie csoport, melynek pontosan egy 1-dimenziós normális részcsoportja van, előáll topologikus hurkok bal oldali szorzáscsoportjaként, de nem lehet differenciálható hurkok, melyekre az $\exp T_1\sigma(G_l/H) \subset \sigma(G_l/H)$ természetes feltétel teljesül, bal oldali szorzáscsoportja.

A [3], [4] dolgozatokban és a [6] dolgozat 10. tételében osztályoztuk azokat a 3-dimenziós összefüggő topologikus hurkokat, melyeknek a G_l bal szorzáscsoportja 4-dimenziós feloldható, ill. nilpotens Lie csoport. A [3] dolgozatban vizsgált Lie csoport centruma triviális és pontosan két 1-dimenziós normális részcsoportja van, a [6] dolgozat 10. tételében levő feloldható, nem nilpotens Lie csoport centruma 1-dimenziós és kommutátor részcsoportja 2-dimenziós, a [4] dolgozatban pedig a nilpotens Lie csoportokkal foglalkoztunk. Aszerint, hogy a G_l csoport automorfizmusa erejéig, mely 1-dimenziós nem normális részcsoportját választjuk L egységeleme stabilizátorának, a [3] dolgozatban az L hurkok három osztályt, a [6] dolgozat 10. tételében négy osztályt, a 4-dimenziós $\mathcal{F}_4$ filiform Lie csoport esetén két osztályt, az $\mathcal{F}_3 \times \mathbb{R}$ csoport esetén pedig egy osztályt alkotnak. Jellemeztük a hurkok szorzásműveletét egyértelműen megadó legfeljebb háromváltozós folytonos függvényeket. Egy egyszerű bizonyítás mutatja, hogy ezek a Lie csoportok sem kétoldali szorzáscsoportjai topologikus hurkoknak. Azoknak a nem-feloldható Lie csoportoknak az esetében is, melyek tranzitívan hatnak 3-dimenziós M sokaságokon, de nincsen olyan részcsoportjuk, mely tranzitívan hat M-en, negatív eredményt kaptunk ([4]).

A legalább 4-dimenziós $\mathcal{F}_n$, $n \geq 4$, elemi filiform Lie csoportok fontos építőkövei topologikus hurkok kétoldali szorzáscsoportjának. A Lie csoportok osztályában csak ezek a 2-dimenziós topologikus hurkok kétoldali szorzáscsoportjai. Azokat a 2-dimenziós topologikus hurkokat, melyeknek filiform Lie csoport a kétoldali szorzáscsoportja, elemi filiform hurkoknak nevezzük és $L_{\mathcal{F}_n}$-nel jelöljük. Mivel az $\mathcal{F}_n$ Lie csoportok nilpotensek először a nilpotens Lie csoportok között kerestük azokat, melyek reprezentálhatók 3-dimenziós topologikus hurkok kétoldali szorzáscsoportjaként. A [4] dolgozatban leírtuk a nilpotens $Mult(L)$ Lie csoportok szerkezetét. Megmutattuk, hogy ha $Mult(L)$ nilpotens, akkor az egyszerűen összefüggő L hurok homeomorf $\mathbb{R}^3$-hoz és centrálisan nilpotens. Az L hurok $Z(L)$ centruma 1 vagy

2-dimenziós és az $L/Z(L)$ faktorhurok vagy izomorf $\mathbb{R}^n$-el, $n = 1$, 2 vagy izomorf egy $L_{\mathcal{F}_n}$ elemi filiform hurokkal. Az első esetben a $Mult(L)$ csoport az M kommutatív normálosztónak egy $Q \cong \mathbb{R}^n$ csoporttal vett szemi-direkt szorzata, $n = 1$, 2, úgy, hogy M direkt szorzata az $Inn(L)$ csoportnak és $Mult(L)$ centrumának. Ezt az esetet két Lie csoport osztály és az általuk meghatározott hurkok jellemzésével szemléltettük. Ezek az osztályok nem tartalmaznak elemi filiform Lie csoportokat, de szoros kapcsolatban állnak velük. Az egyik osztályba azok a legalább 6-dimenziós Lie csoportok tartoznak, melyek két elemi filiform Lie csoport direkt szorzatai úgy, hogy centrumuk közös, a másik osztályba a legalább 4-dimenziós elemi filiform Lie csoportoknak a valós számok $\mathbb{R}$ additív csoportjával vett direkt szorzatai. A hurkok centrális bővítései kommutatív Lie csoportoknak kommutatív Lie csoportok által, és a szorzásműveletüket megadó függvények exponenciális polinomokból származnak.

Ellentétben a 2-dimenziós topologikus hurkokkal a 3-dimenziós hurkok kétoldali szorzáscsoportjai nem feltétlenül nilpotensek. A korábbi dolgozatokban alkalmazott vizsgálati módszerek és eszközök kiterjesztésével a [6] dolgozatban osztályoztuk azokat a legfeljebb 5-dimenziós feloldható K Lie csoportokat, melyek 3-dimenziós topologikus L hurkok kétoldali szorzáscsoportjai. Az osztályozás szempontjából döntő szerepet játszott azoknak a 3-dimenziós egyszerűen összefüggő topologikus hurkok szerkezetének meghatározása, melyek kétoldali szorzáscsoportja feloldható Lie csoport és rendelkeznek 1-dimenziós normális részhurokkal. Felhasználva ezt az eredményt és a Lie csoportok hatásait topologikus sokaságokon a következőt kaptuk: Minden 3-dimenziós egyszerűen összefüggő topologikus L hurok esetében, melynek egy legfeljebb 5-dimenziós feloldható Lie csoport a kétoldali szorzáscsoportja, a $Mult(L)$ szorzáscsoport az $M = Z \times Inn(L)$ kommutatív normálosztónak egy $\mathbb{Q} \cong \mathbb{R}^2$ csoporttal vett szemi-direkt szorzata, ahol $Z \cong \mathbb{R}$ egy centrális részcsoportja $Mult(L)$-nek. Az L hurok pedig centrális bővítése az $\mathbb{R}$ normális Lie csoportnak az $\mathbb{R}^2$ Lie csoport által. Az osztályozás során azt kaptuk, hogy minden $Mult(L)$ csoport 5-dimenziós, centruma nem triviális és felbomlik valódi részcsoportok direkt szorzatára. Jelölje $\mathcal{L}_2$ a 2-dimenziós nem kommutatív egyszerűen összefüggő Lie csoportot. Ha $Mult(L)$ centruma 1-dimenziós, akkor a $Mult(L)$ csoport vagy az $\mathcal{F}_3 \times \mathcal{L}_2$ Lie csoport, vagy az $\mathbb{R} \times \mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_2$ Lie csoport, vagy a direkt szorzata $\mathbb{R}$-nek és azoknak a 4-dimenziós felbonthatatlan feloldható Lie csoportoknak, melyeknek legfeljebb egy 1-dimenziós normális részcsoportjuk van és kommutátor részcsoportjuk 2-dimenziós. Ha $Mult(L)$ centruma 2-dimenziós, akkor $Mult(L)$ a direkt szorzata az $\mathbb{R}^2$ Lie csoportnak és azoknak a 3-dimenziós Lie csoportoknak, melyek kommutátor részcsoportja 2-dimenziós. Az $\mathbb{R}^2$ Lie csoportnak és az euklideszi sík mozgáscsoportjának Ω direkt szorzatáról megmutattuk, hogy nem kétoldali szorzáscsoportja 3-dimenziós topologikus huroknak, annak ellenére, hogy Ω univerzális lefedő csoportja rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

Ha a $Mult(L)$ csoport egyszerű, akkor az L hurok is egyszerű és az $Inn(L)$ részcsoport maximális. Az utolsó állítás T. Kepka és M. Niemenmaa eredménye. Csoportelmélethez hasonlóan az egyszerű struktúrák ismerete hurkok esetében is alapvető az összes többi hurok konstrukciójához. Véges hurkok körében végzett kutatások azt támasztják alá, hogy számos véges egyszerű csoport esetében az S-összefüggő transzverzálisok létezésének akadályai vannak. Ezt az észrevételt erősítik meg a legfeljebb 8-dimenziós kvázi-egyszerű Lie csoportok körében végzett vizsgálatunk. A. A. Onischik meghatározta azokat a kvázi-egyszerű Lie csoportokat, melyek tranzitívan és effektíven hatnak 3-dimenziós sokaságokon. Eredményét felhasználva azt kaptuk, hogy ha a $Mult(L)$ csoport kvázi-egyszerű és L elemei az S^3 gömbfelület pontjai, akkor $Mult(L)$ a következő Lie csoport lehet: $SL_2(\mathbb{C})$, $PSU_3(\mathbb{C},1)$, az $SL_3(\mathbb{R})$ univerzális lefedő csoportja, $SL_4(\mathbb{R})$, $SO_5(\mathbb{R},1)$, $Sp_4(\mathbb{R})$. Ha pedig L homeomorf az $\mathbb{R}^3$ térrel, akkor $Mult(L)$ a $PSL_2(\mathbb{R})$ Lie csoport lehet. A [8] dolgozatban azt vizsgáltuk, hogy mely legfeljebb 8-dimenziós kvázi-egyszerű Lie csoport áll elő topologikus hurok kétoldali szorzáscsoportjaként. Először megkerestük ezen Lie csoportok maximális részcsoportjait. Topologikus érvek alkalmazásával a probléma a következő esetek vizsgálatára redukálódik: A $Mult(L)$ csoport vagy a $PSL_2(\mathbb{C})$, vagy a $PSU_3(\mathbb{C},1)$, vagy az $SL_3(\mathbb{R})$ egyszerű csoport. Az $Inn(L)$ részcsoport vagy ezeknek a csoportoknak egy maximálisan kompakt részcsoportja vagy a $PSU_3(\mathbb{C},1)$ csoport egy 5-dimenziós részcsoportja. Konjugálás erejéig ezek a részcsoportok egyértelműen meghatározottak. A első három esetben az L hurok homeomorf az $\mathbb{R}^n$ térrel, ahol $n = 3,4,5$, az utolsó esetben pedig L homeomorf az S^3 gömbfelülettel. Ezeket az eseteket komoly számolás segítségével tudtuk kizárni. A számolások jelentős része annak a feltételnek az ellenőrzésére irányult, hogy egy L hurok bal- és jobb oldali szorzáscsoportja pontosan akkor egyezik meg, ha minden $x \in L$ esetén a $f(x) : y \mapsto \lambda_y^{-1}\lambda_x y : L \to L$ leképezések elemei az L hurok egységeleme H stabilizátorának. Ezt a feltételt Nagy P. T. és K. Strambach bizonyították.

Ezzel szemben az $SL_4(\mathbb{R})$ kvázi-egyszerű Lie csoport kétoldali szorzáscsoportja S^3 gömbfelületen realizált L topologikus hurkoknak. Ezt az eredményt azoknak a 4-dimenziós lokálisan kompakt topologikus kvázitesteknek a vizsgálatával nyertük, melyek magja a komplex számok $\mathbb{C}$ teste. Ezeket a kvázitesteket N. Knarr határozta meg. A szorzás struktúrájukról bebizonyítottuk, hogy ezek az $\mathbb{R}$ csoportnak és egy fenti tulajdonságú L huroknak a direkt szorzata. Az L hurkok bal szorzáscsoportja is érdekes struktúrájú; izomorf azoknak a 2×2-es komplex mátrixoknak a csoportjával, melyek determinánsa 1 abszolút értékű. Mivel egy K. Strambachal közös korábbi dolgozatunkban Fourier sorok elméletének segítségével sikerült előrelépni az S^1 gömbfelületen definiált differenciálható hurkok osztályozásában, vizsgáltuk a 2-dimenziós topologikus kvázitestek Q^* szorzás struktúráját is hurok elméleti oldalról. Megállapítottuk, hogy minden Q^* hurok az $\mathbb{R}$ csoport és egy 1-dimenziós kompakt hurok szorzata. Megtaláltunk azt az általános formulát, amely minden 2-dimenziós differenciálható kvázitest szorzásműveletét megadja. D. Betten kollineáció csoportjuk meghatározásával osztályozta a 4-dimenziós transzláció síkokat. Formulánkat alkalmazni szeretnénk azáltal, hogy segítségével explicit alakba megadjuk a D. Betten által osztályozott transzláció síkokat koordinátázó kvázitestek szorzásműveletét. Ezt a feladatot a 8-dimenziós kollineáció csoportok esetében elvégeztük, a 7-dimenziós esetek vizsgálata most is tart. Ezáltal további eredményeket tudtunk mondani a 2-dimenziós kvázitestek multiplikatív hurkának szerkezetéről. Ezeket az eredményeket a [9] dolgozatban szeretnénk közölni.

A legbővebb osztályát azoknak a nem asszociatív bővítéseknek, melyek ugyanazon a módon tárgyalhatók, mint a csoportbővítések, az ú. n. Schreier hurkok alkotják. Ezek egy N csoportnak egy S hurok általi L bővítései, melyeket megkonstruálhatunk a csoportok esetében használt két függvény és a köztük fennálló függvényegyenletek segítségével. Ezeket az egyenleteket Nagy P. T. és K. Strambach határozták meg Schreier loops című dolgozatukban. Az [5] K. Strambachal közös dolgozatban a centrális bővítéseket vizsgáltuk, azaz olyan L bővítéseket, hogy az S hurok csak a triviális automorfizmust indukálja az N csoporton. A fenti egyenletek megoldásával jellemeztünk minden olyan L bővítést, amikor S egy súlyozott Steiner hurok és L kielégít valamely érdekes algebrai azonosságot (különböző alternatív tulajdonságai, különböző inverz tulajdonságai vannak, Bol azonosságot teljesít). Vizsgálatainkat az motiválta, hogy ezek a hurok tulajdonságok megfogalmazhatók és kezelhetők a csoportelméleten belül. Leírtuk a súlyok által generált D csoport és a különböző hurok tulajdonságok közötti kapcsolatokat és meghatároztuk a D csoportot. Ha az S hurok véges és a D csoport nem kommutatív, akkor D kiterjesztése egy ciklikus csoportnak egy feloldható Fischer csoport által. Ebben az esetben az L hurok csak a jobb inverz tulajdonságot teljesíti. Leírtuk a bővítések jobb-, illetve bal szorzáscsoportjait, a bővítések automorfizmus csoportjait és hogy milyen feltételek teljesülése esetén kapunk izomorf bővítéseket.