Az OTKA K72537 – Differenciálgeometria és határterületei c. projekt szakmai beszámolója

A kutatócsoport tagjai számos fontos eredményt értek el a differenciálgeometria és általánosabban a geometria területén. Az alábbi felsorolásban az eredményeket a kutatócsoportbeli szerző(k) szerint csoportosítottuk, nem az eredmények súlyossága sorrendjében. Ez utóbbiról a megjelenés helyének impakt faktora ad elég pontos képet.

Bezdek Károly és Rolf Schneider a probléma egy gömbi változata kapcsán Linhart egy tételét általánosítva bebizonyították, hogy az adott beírt gömbbel rendelkező gömbi konvex testek közt a gömbi diéderek térfogata a legnagyobb.

Bezdek Károly *Tarski's plank problem revisited* dolgozatában áttekintette a Tarski-féle ,,pallóprobléma" nyomán kialakult kutatási irányokat, eredményeket, és több sejtést is megfogalmazott.

A gömbpoliéderek az euklideszi tér véges sok kongruens gömbje metszeteként előállítható halmazok. Egy gömbpoliédert ,,kövérnek" nevezünk, ha tartalmazza az őt generáló gömbök középpontjait. Bezdek Károly kiterjesztette Schrammnak az állandó szélességű testek megvilágításáról szóló tételét kövér gömbpoliéderek családjára.

Bezdek Károly az *Illuminating spindle convex bodies and minimizing the volume of spherical sets of constant width* c. dolgozatában az úgynevezett orsó-konvex halmazokkal foglalkozik. A d-dimenziós euklideszi tér egy kompakt, nem üres belsejű halmazát akkor nevezzük orsó-konvexnek, ha előáll véges, vagy végtelen sok kongruens d-dimenziós gömb metszeteként. Egy orsó-konvex halmazt akkor nevezünk ,,kövérnek", ha tartalmazza az őt előállító gömbök középpontjait. A cikk központi része Schramm állandó szélességű konvex testek megvilágítására vonatkozó tétel kiterjesztése kövér orsó-konvex halmazokra.

A *Contact numbers for congruent sphere packings* cimű dolgozatában Bezdek Károly azt bizonyítja, hogy ha $C(n)$ jelöli a 3-dimenziós euklideszi tér $n > 1$ kongruens gömbjének elhelyezéseire az érintkező gömbpárok számának maximumát, akkor

$$0.695 < \frac{6n - C(n)}{n^{2/3}} < \sqrt[3]{486} = 7.862\ldots$$

minden $n = k(2k^2+1)/3$-ra, ahol k legalább 2. A *Contact numbers for congruent sphere packings via Voronoi diagrams* c. dolgozatában Harborth (1974) és saját kutatásait folytatva egy n darab egységgömbből álló gömbpakolás maximális érintkezési számára adott alsó és felső becsléseket a 3-dimenziós euklideszi térben a pakoláshoz tartozó Voronoi-diagram felhasználásával. A dolgozatban vizsgált másik alapkérdés az előző kérdésnek az a speciális esete, amikor az n darab gömb egy rácsszerű gömbpakolás gömbjeiből kerül kiválasztásra. A *Contact numbers for congruent sphere packings in Euclidean 3-space* c. cikk további alsó és felső becsléseket ad a maximális érintkezési számra kombinatorikus és analitikus módszerek ötvözésével, illetve néhány gömbpakolásokra vonatkozó friss eredmény felhasználásával.

A *From normal tilings to Voronoi tilings of sphere packings in Euclidean* 3*-space* c. cikkében Bezdek Károly felveti és tanulmányozza azt a problémát, mely nagyon közel áll a legsűrűbb gömbpakolás problémájához, hogy hogyan kell a 3-dimenziós euklideszi teret felbontani konvex cellákra úgy, hogy midegyik cellába beleférjen egy egséggömb és a cellák átlagos felszíne (illetve átlagos élgörbülete) a lehető legkisebb legyen. Bebizonyította, hogy a cellák átlagos felszíne (illetve átlagos élgörbülete) legalább $24/(\sqrt{3})$. Ezt a becslést tovább javította egységgömbök Voronoi-felbontásai esetén.

Csikós Balázs és Horváth Márton az *On the volume of the intersection of two geodesic balls* c. cikkében bebizonyította, hogy egy teljes összefüggő Riemann-sokaságban akkor és csak akkor igaz, hogy két geodetikus gömb metszetének térfogata csak a gömbök sugarától és a középpontok távolságától függ, ha a tér harmonikus. E kutatás folytatásaként bebizonyították, hogy a harmonikusság következik már abból is, ha a metszettérfogati feltételt csak egyenlő sugarú gömbökre tesszük fel. Ez az erősebb eredményük a Journal of Differential Geometry folyóiratban jelent meg *A characterization of harmonic spaces* címmel.

Csikós Balázs és Kunszenti-Kovács Dávid egy korábban bizonyított tétele szerint, ha egy teljes és összefüggő Riemann-sokaságban három geodetikus gömb metszetének térfogata csak a sugaraktól és a középpontok távolságától függ, akkor a tér egyszeresen összefüggő és állandó görbületű. Ezt az eredményt is sikerült Csikós Balázsnak Horváth Mártonnal közösen megerősíteni az *A characterization of spaces of constant curvature by minimum covering radius of triangles* cikkben. Nevezetesen, a tér állandó görbületűsége már abból is következik, ha a három gömb metszettérfogatára vonatkozó feltételt csak egyforma sugarú gömbökre tesszük fel. Sőt, elég azt a még gyengébb feltételt tenni, hogy a három gömb metszetének üres volta csak a középponttávolságoktól és a sugártól függ.

Csikós Balázs és Horváth Márton több különböző differenciálgeometriai problémát vizsgált még (A Kneser-Poulsen-sejtés valószínűségi változatát, Bobenko sejtését a diszkretizált Willmore-energia kritikus értékeiről, V. Matveev egy ellipszoidkarakterizációs sejtését stb.) Ezekkel kapcsolatban értek el apróbb részeredményeket, de ezek még nem értek meg publikálásra.

Csikós Balázs és ifj. Böröczky Károly bebizonyították Fejes-Tóth László momentumtételének egy új változatát, melyben az integrandus nem a második momentumtól, hanem egy másik kvadratikus alaktól függ. Az eredmény alkalmazásával a konvex testek politópokkal való approximálhatóságára vonatkozó, ifj. Böröczky Károlytól származó általános becslésekben az egyik kulcsszerepet játszó függvény a háromdimenziós esetben expliciten kiszámolható lett.

Csikós Balázs, Kiss György Konrad Swanepoel és Oloff de Wet a (szigorúan) antipodális halmazcsaládokat vizsgálta. Többek között bebizonyították, hogy nem létezik olyan szigorúan antipodális, 4 halmazból álló halmazcsalád $\mathbb{R}^3$-ban, melyben mind a négy halmaz egy regulárisan paraméterezhető egyszerű görbeív.

Csikós Balázs Szalkai Balázzsal közösen egy R. Connelly által fevetett problémát vizsgált. Az általános kérdés az, hogyan kell elhelyezni n darab r sugarú kört, hogy uniójuk egy adott $R > r$ sugarú körből a lehető legnagyobb részt fedje le. A kérdés nyilván csak akkor érdekes, ha r elég nagy ahhoz, hogy az n kis kört ne lehessen diszjunktan belepakolni a nagy körbe, de nem annyira nagy, hogy a kis körökkel le lehessen fedni a nagyot. Ismert hogy $n = 5$ esetén az optimális konfiguráció kezdetben forgásszimmetrikus, de az r növelésével a forgásszimmetria valahol elvész. Sikerült $n \leq 3$ esetén belátni, hogy az optimális konfiguráció mindvégig forgásszimmetrikus marad, és megadni egy módszert, mellyel 5 kör esetén pontosan meg lehet mondani azt a sugárértéket, amelyiknél az optimális konfiguráció forgásszimmetriája elvész. Az eredmények publikálása folyamatban van.

Egy TÁMOP pályázat keretein belül Csikós Balázs írt egy Differential Geometry c. közel 354 oldalas angol nyelvű tankönyvet, mely a Typotex Kiadó gondozásában jelent meg.

Fehér László Rimányi Richárddal közösen kifejlesztett egy általános módszert szingularitások Thom-polinomjainak kiszámítására. Eközben rávilágítottak a kapcsolatra a Thom-polinomok és a Hilbert-sémák ekvivariáns geometriája, valamint az iterált reziduum azonosságok között. Két alkalmazását vizsgálták M. Kazarian Thom-sorokra vonatkozó formulájának:

(1) A kétparaméteres kúpszeletsorok klasszikus elméletét az ekvivariáns kohomológia szemszögéből vizsgálva kiszámolták számos szingularitás korábban nem ismert Thom-sorát. Melléktermékként Fehér és Patakfalvi incidenciatételének alkalmazásával új bizonyítást kaptak a kétparaméteres kúpszeletsorok hierarchiájára.

(2) Sikerült néhány harmadrendű Thom-Boardman-osztály Thom-sorát részben vagy teljesen meghatározni.

Fehér László Rimányi Richárddal és Domokos Mátyás az *Equivariant and invariant theory of nets of conics with an application to Thom polynomials* cikkben ekvivariáns kohomológia segítségével leírták az orbit-hierarchiát. Explicit kifejezést találtak az invariáns polinomokra. Alkalmazták az eredményeket új Thom-polinomok és a determinánsleképezés multiplicitásainak kiszámolására.

Fehér László, Némethi András és Rimányi Richárd vizsgálták azon mátrixok halmazát, melyekre az oszlopok bármely részhalmazának rangja megegyezik a részhalmazhoz egy előre hozzárendelt egész számmal. Tanulmányozták e halmaz Zariski-lezárása által reprezentált ekvivariáns kohomológiaosztályt. Megmutatták, hogy ennek az osztálynak az együtthatói geometriai leszámlálási problémák megoldásaiként kaphatók meg, melyek a projektív terek lineáris Gromov-Witten-invariánsainak természetes általánosításai. Módszert is adtak ezen osztályok kiszámolására, és bemutatták az osztályok néhány alapvető tulajdonságát is.

Fehér László Kőműves Balázs egy eredményét továbbfejlesztve talált egy lokalizációs formulát dupla Schubert-polinomokra, valamint kidolgozott egy módszert ekvivariáns osztályok együtthatói pozitivitásának igazolására globálisan generált holomorf nyalábokhoz. A módszer bekerült a Rimányi Richárddal és Némethi Andrással együtt írt *Equivariant classes of matrix matroid varieties* c. cikkük Commentarii Mathematici Helvetici folyóiratban megjelent verziójába.

Fehér László vizsgálta még Morin-leképezések elkerülő-ideálját, továbbfejlesztve Terpai Tamás eredményeit és Szenes Andrással folytatta a valós Morin-szingularitások Thom-polinomjainak kiszámítását. Itt új módszereket kell kidolgozni, dolgoztak a Vergne-féle integrálmódszer adaptációján. Sikerült az A_4 szingularitás Thom-polinomját kiszámolniuk.

Fehér László ezen kívül kiszámolta bizonyos kontakt szingularitások obstrukció-ideálját (vagyis az összes elsőrendű kohomologikus obstrukciót) a komplex és a valós esetekben. Erről egy kézirat készülőben van.

Fehér László Némethi Andrással közösen dolgozott egy sejtésen, mely szerint projektív terek közti holomorf leképezések vagy lineárisak, vagy maximálisan szingulárisak, azaz bennük minden elvárható szingularitás meg is jelenik. Sok fontos előrelépést tettek: Belátták pl., hogy mindig van olyan pont, ahol a derivált rangja maximálisat esik. Sikerült kapcsolatot találni szingularitások incidenciaosztályaival és az úgynevezett incidencia-sejtéssel. Sikerült valós projektív terek közti sima leképezések szingularitásaira is néhány új állítást belátni, általánosítva Szűcs András eredményeit. Az eredményeket összefoglaló cikk nagyjából elkészült, egy állítás hiányzik még, ami két alapvető invariánsát kapcsolná össze véges típusú szingularitásoknak: A sejtés az, hogy a mélység és a determináltság eltérése legfeljebb 1 lehet. Itt egyelőre csak részeredmények vannak.

Fehér László talált egy bizonyítást arra, hogy a $Gr_{2k}(\mathbb{R}^{2l})$ Grassmann-sokaságok kohomológia gyűrűjéből a $Gr_k(\mathbb{C}^l)$ Grassmann-sokaság kohomológiagyűrűjébe menő természetes csoport-izomorfizmus multiplikatív. A bizonyítás az úgynevezett konjugációs terek (conjugation spaces) elméletének adaptációja. Ez az eredmény jól alkalmazható valós leszámlálási problémákban alsó becslésekhez.

Fehér Lászlónak sikerült megoldani Terpai Tamással közösen a négy altér problémát: Adott 4 általános helyzetű $2k$-dimenziós altér $\mathbb{R}^{4k}$-ban, hány olyan $2k$-dimenziós altér van, amely mind a négyet k-dimenziós altérben metszi. A megoldásoknak előjel is tulajdonítható. Ezek meghatározása is sikerült Matszangosz Ákos segítségével. Az utóbbi eredmény az arxiv-on olvasható a *Real solutions of a problem in enumerative geometry* dolgozatban.

Ezen kívül Fehér Lászlónak készülőben van egy cikke valós ekvivariáns Poincaré-duálisokról, Thom-polinomokról és leszámlálási feladatokról.

Kiss György Bezdek Károllyal közösen a klasszikus megvilágítási probléma néhány rokonával (röntgen-szám, kvantitatív megvilágítási paraméterek) foglalkozott. Bebizonyították a röntgenszám-sejtést állandó szélességű testekre 3, 4, 5 és 6 dimenzióban, és meghatározták a szabályos testek megvilágítási paramétereit.

Kiss György és O. de Wet a klasszikus megvilágítási probléma kvantitatív általánosításával kapcsolatban ért el eredményeket. *Notes on the illumination parameters of convex polytopes* cikkükben megmutatták, hogy tetszőleges d dimenzióban léteznek olyan testek, melyek megvilágítási paramétere legalább $3 \cdot 2^{d-1}$. Meghatározták a háromdimenziós szabályos testek megvilágítási paraméterét és becsléseket adtak a félig szabályos testek megvilágítási paraméterére.

Csikós Balázs és Kiss György írt egy *Projektív geometria* c. 250 oldalas tankönyvet, mely kitér azokra a területekre is, melyeken keresztül a geometriának ez a klasszikus ága a mai, modern matematikához kapcsolódik. A könyv a Polygon Kiadó gondozásában jelent meg.

Lóczi Lajos Joseph Páezzel közösen közönséges differenciálegyenletek Runge–Kutta-féle diszkretizációit vizsgálta N-dimenziós nyeregcsomó-, csúcs-, illetve Bogdanov–Takens-féle, általánosított Hopf-féle, kettős Hopf-féle és nyeregcsomó-Hopf-féle bifurkációs pontok környezetében. A legegyeszerűbb bifurkációs pontokban konjugációs eredményeket igazoltak, a magasabb kodimenziós esetekben a bifurkációs diagramok, a kritikus sajátértékek és sajátvektorok, illetve diszkretizáltjaik közötti kapcsolatot vizsgálták. Megmutatták, hogy elegendően kis lépésköz esetén a numerikus módszerek ezen családja pontosan reprodukálja a fenti szinguláris pontokat: a Runge–Kutta-módszer által meghatározott diszkrét dinamikai rendszerben ugyanannál a paraméterértéknél lépnek fel a megfelelő bifurkációk diszkrét megfelelői. Megvizsgálták továbbá, hogy a bifurkációs paraméterértéknél a folytonos, és a neki megfelelő diszkrét dinamikai rendszert a megfelelő centrális sokaságokra megszorítva mi mondható a normálformák együtthatóiról, illetve mi a kapcsolat a centrális sokaságok érintőtereinek bázisai között. Különböző, egylépéses numerikus módszerekkel diszkretizált 1- és 2- kodimenziós bifurkációkat vizsgáltak, amelyek közönséges differenciálegyenletek paraméteres családjaiban lépnek fel. A hangsúly a különféle közelségi becsléseken és konjugációs eredményeken volt. Eredményeiket a *Various Closeness Results in Discretized Bifurcations* c. cikkben foglalták össze, mely a Differential Equations and Dynamical Systems folyóiratban jelent meg.

Lóczi Lajos David Ketchesonnal közösen vizsgálta a Runge–Kutta-módszerek kezdetiérték-problémákra való alkalmazásakor fellépő racionális törtfüggvények abszolút monotonitási sugarát. E mennyiség jelentőségét az adja, hogy a sugár kapcsolatba hozható bizonyos numerikus tulajdonságok megőrződésével. Racionális törtfüggvények egy 4-paraméteres osztályában ellenpélda konstruálásával sikerült megcáfolni van de Griend és Kraaijevanger egy 1986-os sejtését. Pozitív eredményként sikerült racionális törtfüggvények bizonyos további 1-, 2-, illetve 3-paraméteres családjaiban, összesen 11 esetben, egzakt algebrai számként meghatározni az elérhető maximális abszolút monotonitási sugarat. A számítógéppel segített, teljes részletességében összesen több száz oldalt kitevő számításokat egy 47 oldalas kéziratban foglalták össze, mely az LMS Journal of Computation and Mathematics folyóiratban jelent meg *Rational functions with maximal radius of absolute monotonicity* címmel.

A SIAM Journal on Numerical Analysis c. folyóirat közlésre elfogadta Lóczi Lajos David Ketchesonnal és Matteo Parsanival közösen írt, *Internal error propagation in explicit Runge–Kutta methods* című 23 oldalas dolgozatát. A cikk a numerikus analízisben előszeretettel használt Runge–Kutta-módszerek belső hibaterjedését vizsgálja néhány fontos módszercsalád esetében. A folyóirat terjedelmi korlátai miatt a részletes számolásokat egy 57 oldalas dokumentum tartalmazza, amely elérhető a http://arxiv.org/abs/1309.1317 címen.

A *Sums of squares and orthogonal integral vectors* c. cikkben Moussong Gábor L. M. Goswick, E. W. Kiss és N. Simányi társszerzőkkel egy rácsgeometriai problémát vizsgál. A $\mathbb{Z}^3$ rács két vektorát nevezzük ikreknek, ha merőlegesek és azonos a hosszuk. A dolgozat a kockarácsok segítségével leírja az ikervektorokat és meghatározza az adott hosszúságú ikervektorok számát. Azokat az M számokat, melyekre teljesül, hogy minden M hosszú rácsvektornak van egy ikerpárja, iker-teljesnek nevezzük. Ezeket teljes mértékben leírták, feltételezve egy híres számelméleti sejtést. A fő eszköz a Hurwitz-egész kvaterniók felbontáselmélete.

Moussong Gábor és Simányi Nándorral közös *Circle decompositions of surfaces* c. dolgozatukban meghatározzák, melyek azok az összefüggő felületek, melyeket diszjunkt topologikus körökre lehet bontani. Homeomorfizmus erejéig pontosan hét ilyen felület van. A bizonyítás melléktermékeként adódik az az állítás, hogy egy felület felbontása topologikus körökre felülről félig folytonos.

Moussong Gábor egy 424 oldalas modern felfogású tankönyvet írt *Geometria* címmel, mely a Typotex kiadó gondozásában jelent meg.

Bezdek Károly és Naszódi Márton a *Rigid Ball-Polyhedra in Euclidean* 3-*Space* c. cikkben gömbpoliéderek merevségi kérdéseit vizsgálta a 3-dimenziós euklideszi térben. Gömpoliédernek nevezzük véges sok zárt egységgömb metszetét. A gömbpoliéderek csúcsai, élei és lapjai természetes módon definiálhatók. Egy gömbpoliédert egyszerűnek nevezünk, ha minden csúcsába pontosan három él fut be. Egy gömbpoliéder standard, ha különböző dimenziós lapjai a tartalmazásra nézve hálót alkotnak. A dolgozat fő eredménye az a Cauchy-típusú merevségi tétel, mely szerint egy egyszerű standard gömbpoliédert lokálisan egybevágóság erejéig egyértelműen meghatároz a laphálójának kombinatorikus struktúrája és az élekhez tartozó lapszögek együttese.

Egy n-dimenziós K konvex testhez két igen természetes konvexitási struktúrát definiálhatunk $\mathbb{R}^n$-en a következő módon. Két pont orsója legyen K összes, a két pontot tartalmazó eltoltjának a metszete. Egy halmaz $\mathbb{R}^n$-ben orsó-konvex K-ra nézve, ha tetszőleges két pontjához azok orsóját is tartalmazza. Másrészt, legyen egy halmaz golyó-konvex K-ra nézve, ha előáll K eltoltjainak metszeteként. A *Ball and Spindle Convexity with respect to a Convex Body* cikkben Lángi Zsolt, Naszódi Márton és Talata István megmutatják, hogy egy tipikus konvex halmazra a két fogalom különbözik, vizsgálják Carathédory tételének változatait, definiálnak egy távolságot, amely illeszkedik az orsó-konvexitáshoz, végül belátnak golyó-konvex halmazokra egy, a Gohberg-Markus-Boltyanski-Hadwiger-féle megvilágítási kérdéshez kapcsolódó stabilitási állítást.

A C. H. Jiménez, Naszódi Márton és R. Villa által írt *Push Forward Measures and Concentration Phenomena* c. cikkben a szerzők azt vizsgálják, hogy egy adott K $\mathbb{R}^n$-beli, origóra szimmetrikus, konvex testen megjelenő mértékkoncentráció hogyan öröklődik egy másik L konvex testre. Nyilvánvaló, hogy ha K és L a Banach–Mazur-távolság szerint egymáshoz közeliek, akkor egy K-n jól koncentrált mérték átvihető egy L-en jól koncentrált mértékké. Felhasználva a centrális projekciót K és L között a szerzők megmutatják, hogy ez jelenség a Banach–Mazur-távolság szerint egymástól távoli testek között is előfordulhat bizonyos esetekben. Ugyanakkor kvantifikálják azt az állítást is, mely szerint a kocka "távol van attól, hogy rajta egy jól koncentrált mérték létezzen".

Bezdek Károlynak és Naszódi Mártonnak a közlésre elfogadott *Spindle Starshaped Sets* cikkben a következőket vizsgálták. Klasszikus fogalom n-dimenziós euklideszi térbeli halmazok csillagszerűsége. Az egyik legfontosabb, ilyen halmazokat karakterizáló tétel Krasznosszelszkij tétele. A klasszikus definíciót orsó-csillagszerűségre cserélve vizsgáltak Krasznosszelszkij-típusú kérdéseket elsősorban analitikus eszközökkel. A vizsgálat kiterjedt olyan kérdésekre is, mint a képtár probléma, így kombinatorikus (algoritmikus) geometriai alkalmazást is adtak.

Naszódi Márton elkezdett dolgozni konvex halmazok fedési tulajdonságairól szóló kérdéseken. A munka célja kettős. Egyrészt olyan nem-probabilisztikus algoritmust találni, amellyel a jelenleg ismert (véletlen módszeren alapuló) gazdaságos fedések alacsony sűrűsége elérhető. Másrészt testek konstruálása, melyeknek a megvilágítási száma (amely szám egy, a testtől függő fedési problémára adott válasz) magas. Az eddig elért eredmények még publikálásra történő benyújtás előtt vannak, de elérhetők az ArXiv gyűjteményben.

Szeghy Dávid Lie-csoportok izometrikus hatását vizsgálta szemi-Riemann-sokaságokon. Sikerült bebizonyítania, hogy bizonyos (normalizálhatósági) feltételek mellett nem Riemann-féle szemi-Riemann-sokaságokra is igaz az infinitezimális principális orbittípus tétele, sőt csak differenciálható sokaságot és hatást feltételezve is sikerült elégséges feltételeket adni, melyek mellett igaz lesz a tétel. A nem-normalizálható orbitokról és az orbitok környezetéről is sikerült új eredményeket bizonyítani, mely segíthet az infintezimális típusok globális struktúrájának megértésében.

A principális orbittípusról szóló tétel Lorentz-sokaságokra vonatkozó kiterjesztésekor a nem-normalizálható orbitok okozzák a problémát. Szeghy Dávid azt vizsgálta, hogy milyen sűrűn lehetnek az ilyen orbitok. Bebizonyította, hogy ha (M, g) egy Lorentz-sokaság és adott rajta egy G Lie-csoport izometrikus hatása, akkor nem létezik olyan U nyílt nem üres halmaz, melyben minden orbit nem normalizálható, és mindnek ugyanaz az infinitezimális típusa. Másként fogalmazva nincs olyan lokálisan stabil orbit, melynek egy környezetében minden orbit nem normalizálható.

Célja annak a bizonyítása, hogy egy Lorentz-sokaság izometrikus csoporthatásánál vagy a normalizálható orbitok vannak sűrűen, vagy minden orbit nem normalizálható, és akkor mind instabil infinitezimális típusú.

Szeghy Dávid a konjugált és fokális pontok elméletével foglalkozott szemi–Riemann-féle sokaságokon. Ismert, hogy egy geodetikus mentén a kezdőponthoz konjugált pontok csak izoláltan helyedkezhetnek el a Riemann-féle esetben, míg a szemi-Riemann-féle esetben a konjugált pontok halmaza akár egy teljes görbeívet is tartalmazhat. Szeghy Dávid bevezetett két feltételt szemi-Riemann-sokaságokon. Az első, erősebbik feltétel teljesülése esetén belátta, hogy a geodetikusok mentén a kezdőponthoz konjugált pontok izoláltan helyezkednek el, a második feltétel teljesülése mellett pedig azt igazolta, hogy a konjugált pontok halmaza nem tartalmazhat teljes görbeszakaszt. Szeghy Dávid belátta továbbá, hogy ha k a metrika minimális indexe, akkor a k-nál nagyobb multiplicitású konjugált pontok izoláltak a geodetikus mentén. Emellett mutatott egy példát, amikor a fokális pontok egy geodetikus variációra nézve nem stabilak. A fenti eredmények publikálása *On conjugate and focal points in semi-Riemannian manifolds* címen folyamatban van.

Szeghy Dávidnak az Indagationes Mathematicae folyóiratban megjelent *Infinitesimal orbit type theorem for normalizable actions* c. dolgozatának fő eredménye a következő: Tekintsük egy Lie-csoport sima hatását egy összefüggő M sokaságon. Tegyük fel, hogy a lokális csőszerű környezetről szóló tétel igaz minden M-beli x pontban. Ekkor van olyan maximális infinitezimális orbittípus, melyre az ehhez a típushoz tartozó orbitok uniója egy sűrű nyílt halmaz M-ben.

Az *On the infinitesimal orbit type of maximal dimensional orbits* cikkben Szeghy Dávid belátta, hogy egy Lie csoport izometrikus hatásánál a maximális dimenziós orbitok sűrűek (ez az eredmény több különböző esetben ismert volt de ez az eset még nem volt bizonyítva az irodalomban). Belátta, hogy a maximális dimenziós orbitok között a lokális stabilitás és a normalizálhatóság ekvivalens. Példát mutatott olyan affin izometrikus csoporthatásra, amikor minden orbit különböző infinitezimális típusú. Egy tétellel be is látta, hogy ez a viselkedés nem kivételes, mert izometrikus csoporthatás esetén, ha egy nyílt halmazban minden orbit maximális dimenziós és nem normalizálható, akkor bizonyos értelemben minden infinitezimális típus itt null mértékű, így nem megszámlálható ebben az esetben a típusok száma. Ezek az eredmények közelebb vittek a cikkben megfogalmazott és célként kitűzött sejtés bizonyításához.

Szenthe János Dmitri Alekseevsky-vel közösen a lokálisan stabil típusú orbitokat vizsgálta Lorentz-sokaságokon izometrikus Lie-csoporthatásokra. Ez a fogalom a principális orbittípus egy megfelelője Lorentz-sokaságokra. Eredményeket ért el egy Lorentz-sokaságon egy izometrikus csoporthatás 1-kodimenziós fényszerű orbitjainak környezetének leírásában. Közlésre benyújtott egy dolgozatot Riemann-sokaságok perfekt izometrikus hatásairól.

Szenthe János Kővári Kálmánnal szférikusan szimmetrikus Einstein téridők szerkezetét vizsgálták és egy olyan eredményt kaptak, mely a F. Kottler által talált ilyen típusú téridőhöz egy globális megközelítésen keresztül jut el. Az erről írt dolgozatuk közlésre be van nyújtva a General Relativity and Gravitation folyóirathoz.

Előkészületben van Szenthe Jánosnak egy dolgozata *Stationary geodesics of Lagrangian systems* címmel, melynek célja stacionárius geodetikusokra vonatkozó létezési tételek bizonyítása.

Az utóbbi időben Szenthe János a principális orbittípus tételnek infinitezimális orbittípusok esetére történő kiterjesztésével foglalkozott, és az eredményeiből egy dolgozat már részben elkészült.

Szőke Róbert Lempert Lászlóval egy nagyobb kutatási terven dolgozott, melynek fő célja annak megértése, hogy ha egy szimplektikus sokaság geometriai kvantálásakor komplex polarizációt választunk, akkor a polarizált szelések Hilbert-tere mennyire függ a polarizáció választásától. Egyik fő tételük szerint a különböző komplex polarizációkhoz tartozó Hilbert-terek nyalábján van egy természetes holomorf, hermitikus Hilbert-nyaláb struktúra, melynek a Chern-konnexiója lapos. Szőke Róbert Lempert Lászlóval közös kutatásaiból három cikk született.

Az *A new look at adapted complex structures* cikkben kiderül, hogy az adaptált komplex struktúrák fogalma értelmes, valahányszor egy Lie-félcsoport hat egy sokaságon. Konkrét esetben az affin félcsoportnak a hatását vizsgálják egy kompakt Riemann-sokaság geodetikusainak N terén. N egy szimplektikus sokaság, melyen megadható Kähler-struktúrák egy komplex 1-paraméteres családja. Ez a család tekinthető egy fibrálásnak és ennek totális terén definiálható egy holomorf struktúra, mely alapvető szerepet játszik az N sokaság geometriai kvantálásánál és a következő cikkben.

A *Uniqueness in geometric quantization* cikkben Lempert László és Szőke Róbert abból indul ki, hogy a geometriai kvantálás gyakran adja Hilbert-tereknek egy egész $\{H_s\}$ családját, melyek mindegyike ugyanannak a klasszikus rendszernek a kvantumállapotait reprezentálja. Természetes kérdés, hogy vajon ezek a Hilbert-terek kanonikusan izomorfak-e. Axelrod-Della, Pietra-Witten és Hitchin munkái azt sugallják, hogy próbáljunk úgy gondolni H_s-re, mint egy H Hilbert-nyaláb egy fibrumára, vezessünk be egy konnexiót H-n és próbáljuk a párhuzamos eltolással azonosítani a fibrumokat. Ebben a cikkben a szerzők azt vizsgálják, mennyire hajtható végre ez a terv. Először is bevezetik Hilbert-terek sima ill. analitikus mezőjének fogalmát. Belátják, hogy egy egyszeresen összefüggő alaptér feletti analitikus mező mindig lapos és hogy ekkor ez a mező azonosítható egy nulla görbületű hermitikus Hilbert-nyalábbal. Másodszor egy általános komplex geometriai direktképproblémát vizsgálnak: egy $E \to Y$ Hermitikus holomorf vektornyaláb előretoltját tekintik egy nem perfekt (!) $Y \to S$ leképezés mentén. Szükséges feltételeket adnak arra, hogy a direktképkéve egy sima Hilbert-mező legyen. Végül egy M kompakt, valós analitikus Riemann-sokaság TM érintőnyalábjának geometriai kvantálását vizsgálják. Ez egy direktképproblémához vezet. Homogén M-re belátják, hogy a direkt kép egy analitikus Hilbert-mező. Bizonyítják, hogy ha M egy tetszőleges kompakt Lie-csoport, akkor ez a direkt kép lapos, azaz a geometriai kvantálás kanonikusan izomorf Hilbert-tereket ad. Bebizonyítják, hogy gömbök esetén csak az 1 és 3 dimenziós gömbökhöz tartozó Hilbert-mező lapos. A többi gömb esetén tehát nem egyértelmű a geometriai kvantálás.

Az előző cikk kutatásait folytatva Szőke Róbert és Lempert László azt az általánosabb a kérdést is vizsgálták, hogy mit lehet mondani a fent említett Hilbert-mezők görbületi formulájáról, ha M egy kompakt szimmetrikus tér, vagy még általánosabban, ha egy úgynevezett kompakt szférikus sokaság. Az adaptált komplex struktúrákat felhasználva próbálták minél pontosabban megérteni az így keletkező kvantum Hilbert-mező görbületét. Fontos lépés, hogy mivel a görbület nem számolható ki expliciten, aszimptotikus módszerekre van szükség, és sikerült az egyváltozós Watson-lemmát többdimenzós kúpokra belátni.

Szőke Róbert és Lempert László az *A new look at adapted complex structures* c. cikkében adott kompakt, valós-analitikus Riemann-sokaság paraméterezett geodetikusainak terén konstruálnak adaptált komplex struktúráknak egy 1-paraméteres családját, és ezek tulajdonságait vizsgálják.

Szőke Róbert és Lempert László átdolgozták egy korábbi kéziratukat és *Direct images, fields of Hilbert spaces and geometric quantization* címmel publikálták a Comm. Math. Phys. folyóiratban

Újabb kutatásaiban Szőke Róbert Florentino-Mathias-Mourao-Nunes egy eredményét általánosította kompakt Lie-csoportokról kompakt szimmetrikus terekre. Az ilyen terekre a felső félsík paraméterezi Kähler struktúrák családját a tér koérintőnyalábján. A különböző paraméterértékekhez tartozó ú.n. kvantum-Hilbert-terek (BKS) párosításának kiszámolásához fontos lépés két parameterértékhez tartozó a kanonikus nyalábok adott globális holomorf n-formák ékszorzatának kiszámolása. Ezt számolta ki Szőke Róbert szimmetrikus terekre.

Verhóczki László a szimmetrikus Riemann-tereken vett sima függvények ún. Funk-transzformáltjával kapcsolatban végzett közös kutatást G. Thorbergsson és S. Klein matematikusokkal. A kompakt szimmetrikus tér legrövidebb zárt geodetikusai egy homogén teret képeznek, és a Funk-transzformáció a szimmetrikus téren vett tetszőleges sima függvényhez az integrálás módszerével rendel hozzá egy függvényt ezen a homogén téren. Többek között sikerült bebizonyítani, hogy ez a hozzárendelés injektív, kivéve azt a speciális esetet, amikor a szimmetrikus tér egy szféra. Az elért eredményekről készült egy közös dolgozat, amely a Publicationes Mathematicae Debrecen folyóiratban jelent meg.

Korábbról ismert (Berndt, Vanhecke, Verhóczki 2003), hogy ha egy szimmetrikus Riemann-téren létezik olyan 1-kohomogenitású izometrikus csoporthatás, amelynél az egyik szinguláris orbit egy reflektív totálgeodetikus részsokaság, akkor a téren meg lehet adni olyan egységvektormezőt, amely harmonikus és minimális. Verhóczki László azt vizsgálta, hogy általánosítható-e ez az állítás a reflektivitási feltétel gyengítésével. Megmutatta, hogy bár a G_2 és $G_2/SO(4)$ kivételes szimmetrikus tereken nincs ilyen izometrikus hatás, mégis megadható rajtuk olyan egységvektormező, amely harmonikus és minimális. Az eredmény *Harmonic and minimal unit vector fields on the symmetric spaces* G_2 *and* $G_2/SO(4)$ címmel jelent meg az Acta Univ. Palacki. Olomouc, Fac. Rerum Nat., Math. folyóiratban.

Verhóczki László foglalkozott azzal a kérdéssel, hogy szimmetrikus Riemann-terekben miként lehet példákat adni olyan egynél nagyobb kodimenziójú részsokaságokra, melyeknek a normális vektornyalábja lapos. Vizsgálta azt a problémát is, hogy ezen részsokaságok alakoperátoraiból miként lehet meghatározni az ún. parallel részsokaságok alakoperátorait. Az elért eredményekről előadást tartott *Submanifolds with flat normal bundle and their parallel submanifolds* címmel egy nemzetközi konferencián.

Verhóczki László írt egy 179 oldalas Klasszikus differenciálgeometria c. tankönyvet is.