Kutatási jelentés
a „Csoportok és más algebrai struktúrák” című
NK72523 számú OTKA projekt eredményeiről

A projekt célja különböző absztrakt algebrai területeken (a csoportelméletben, az invariánsok elméletében, a gyűrűelméletben, a Lie-algebrák elméletében, a hurkok [„loop”-ok] elméletében, valamint az univerzális algebrában) kitűzött problémák vizsgálata volt. Az eredeti munkatervben 22 aktuális, nemzetközi érdeklődésre számot tartó problémát mutattunk be részletesen. Ezek jó részében sikerült előrehaladást elérnünk, és emellett néhány olyan kérdést is vizsgáltunk, amelyekre a pályázat beadása után irányult a projektben résztvevő kutatók figyelme.

A támogatás lehetővé tette fiatal kutatók alkalmazását is. Ennek keretében átmeneti munkalehetőséget kapott három tehetséges fiatal. Maróti Attila az Amerikai Egyesült Államokból tért haza, majd a projekt keretében történt alkalmazása után egy európai uniós Marie Curie grantot nyert el, így továbbra is az MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetben dolgozik és projektünk munkájában változatlanul kiemelkedő eredményességgel vesz részt. Halasi Zoltán a 7. számú kutatási témánkban ért el jelentős eredményt, jelenleg már a Debreceni Egyetem oktatója. Somlai Gábort, az ELTE doktorandusz hallgatóját az 5. számú kutatási téma vizsgálatára alkalmaztuk. Nagyszerű eredménye a Journal of Algebraic Combinatoricsban fog hamarosan megjelenni (online már elérhető).

A kutatások eredményeképpen 58 dolgozat és egy könyv készült. A publikációk jelentős része rangos nemzetközi folyóiratokban jelent meg, mint az Annals of Mathematics, Journal of the European Mathematical Society, Journal of Algebra, Journal of Group Theory, Journal of Algebraic Combinatorics, Proceedings of the American Mathematical Society.

Az alábbiakban összefoglaljuk az egyes témakörökben elért fontosabb eredményeinket. Különösen jelentősnek tartjuk az 1., 10., T1. és 7. témakörökben elért előrehaladást.

Csoportelmélet

1. Pyber László és Szabó Endre áttörő jelentőségű eredményt ért el a Lie-típusú egyszerű csoportok növekedési függvényével kapcsolatban. Fő eredményük szerint, ha az A halmaz generálja az L r-rangú Lie-típusú egyszerű csoportot, akkor $|A^3| > |A|^{1+c(r)}$ (ahol $c(r) > 0$ csak r-től függő konstans) vagy $A^3 = L$. 80-oldalas dolgozatuk lektorálás alatt áll, de az arXiv-on megtalálható. Velük teljesen egyidőben ezt az eredményt Breuillard, Green és Tao is megkapta. Pyber számos konferencián számolt be erről az óriási nemzetközi érdeklődést kiváltó eredményükről. Ennek a tételnek az expander gráfok elméletében is fontos alkalmazása van.

2. A véges csoportok részcsoporthálóinak intervallumaiként előálló hálók jellemzésének több évtizede megoldatlan kérdésében nem sikerült előrehaladást elérnünk. A téma ismét a nemzetközi érdeklődés előterébe került, miután a csoportelmélet vezető kutatója, M. Aschbacher több dolgozatot publikált erről, de neki sem sikerült lényeges új eredményt elérnie.

3. Szofikus csoportok bizonyos amalgámjairól, illetve HNN-bővítésekről sikerült igazolni, hogy azok is szofikus csoportok.

4. A. Jaikin-Zapirain és Pyber László az Annals of Mathematicsban megjelent dolgozatában jellemzi a pozitívan végesen generált provéges csoportokat. Ezzel számos — Lubotzkytól, Manntól, Segaltól és másoktól származó — sejtést sikerült igazolniuk. Képletet adtak arra a legkisebb r számra, hogy a G provéges csoportot r véletlen elem legalább $1/2$ valószínűséggel generálja.

Abért Miklós a lokális konvergencia fogalmát ültette át szimmetrikus terekre. Egy Bergeronnal, Biringerrel, Gelanderrel, Nikolovval, Raimbaulttal és Samettel közös munkájában bebizonyította, hogy egy legalább 2 rangú egyszerű Lie-csoportban bármely olyan rácssorozatra, amelynek térfogata végtelenhez tart, a hozzátartozó szimmetrikus terek lokálisan konvergálnak az univerzális fedőtérhez. Ennek következménye, hogy a térfogattal normalizált Betti-számok konvergálnak az univerzális fedőtér L^2 Betti-számaihoz, ami a Lück-féle approximációs tétel uniform változataként is tekinthető.

Ugyanő megszámlálható csoportok valószínűségi mértéket megtartó hatásait is vizsgálta. Weiss-szel bebizonyították, hogy minden megszámlálható csoport minden szabad hatása gyengén tartalmazza a csoport Bernoulli-hatásait. Ebből következik, hogy végesen generált csoportokra az úgynevezett „cost" maximális a Bernoulli-hatásokon, speciálisan, hogy az összes nemtriviális Bernoulli-féle faktorhatásnak ugyanaz a „cost"-ja.

5. Somlai Gábor — Muzychuk és Spiga korábbi eredményeit jelentősen megjavítva — igazolta, hogy a legalább $2p+3$ rangú elemi Abel p-csoportokra nem teljesül a Cayley izomorfizmus (CI) tulajdonság. Ugyanő meghatározta az összes $8p$-rendű CI-csoportot is, ez a munkája még publikálatlan, hamarosan elkészülő doktori disszertációjának része lesz.

6. Az Orsay-ben működő CNRS Laboratoire de la Recherche Informatique-kal a kapcsolatunk megszakadt, a kvantumszámítógépek területén felvetődött rejtett részcsoport problémával kapcsolatban nem folytattuk az éppen csak megkezdett kutatásainkat.

7. Higmannek a felső háromszögmátrixok csoportjának konjugáltosztályszámára vonatkozó sejtését általánosítottuk tetszőleges minta-csoportokra. Bebizonyítottuk, hogy van olyan minta, hogy a megfelelő minta-csoportok konjugáltosztályszáma mint az alaptest elemszámának függvénye nem polinom, sőt véges sok polinommal sem írható le, ugyanis egy elliptikus görbén fekvő pontok számától függ. Halasi Zoltán és Pálfy Péter Pál dolgozata a Journal of Group Theoryban jelenik meg (online már elérhető). Módszerünket több konferencián is ismertettük. Bár az eredeti sejtésre vonatkozólag eredményünknek formális következménye nincs, mégis arra utal, hogy valószínűleg az sem igaz.

Konjugáltosztályszámmal kapcsolatos Héthelyi László, Horváth Erzsébet, Thomas Keller és Maróti Attila azon eredménye is, hogy véges sok kivételtől eltekintve, a konjugáltosztályok száma legalább $2\sqrt{p-1}$, ahol p a csoport rendjének legkisebb prímosztója.

8. Karakterfok-gráfok témájában nem értünk el új eredményt.

További eredményeink a csoportelméletben:

T1. N. Nikolov és Pyber egyszerű bizonyítást adott Shalev egy eredményére és erősítette is a tételt. Ha w egy szó és L egy elég nagy véges egyszerű csoport, akkor a $w(L)$ halmaz egy viszonylag sűrű részhalmazából vett három tényező szorzataként a csoport minden eleme megkapható.

T2. Babai László, Pálfy Péter Pál és Jan Saxl egy terjedelmes dolgozatban alsó becsléseket adott a véges egyszerű csoportokban levő, egy adott prímszámmal nem osztható rendű elemek számarányára. Ennek az eredménynek a véletlen választást használó számítógépes csoportelméleti algoritmusok futási idejének becslésénél van nagy jelentősége.

T3. S. P. Glasby, Pálfy Péter Pál és Schneider Csaba olyan p-csoportokat vizsgált, amelyeknek egyetlen nemtriviális karekterisztikus részcsoportja van (ún. UCS csoport). Meghatározták az összes legfeljebb 4 generátorú UCS csoportot. A kérdés érdekes reprezentációelméleti kapcsolatát tárták fel; ennek segítségével szükséges, illetve elégséges feltételeket adtak magasabb generátorszámú UCS csoportok létezésére.

T4. Hegedűs Pál bebizonyította, hogy egy véges feloldható csoportban a maximális részcsoportok száma legfeljebb annyi, mint az irreducibilis karakterek fokainak összege, tehát nem haladhatja meg a csoport rendjét.

T5. Maróti Attila — különböző társszerzőkkel — részleges választ adott arra a kérdésre, hogy mikor lehet egy csoport elemeit úgy körbe rendezni, hogy az egymás melletti elemek páronként generálják a csoportot, azaz van Hamilton-kör a generálási gráfban; illetőleg ennek a gráfnak más tulajdonságait is tanulmányozták.

T6. Maria Chiara Tamburini és Maróti Attila aszimptotikusan éles explicit alsó és felső korlátot adott annak valószínűségére, hogy két n-edfokú permutáció S_n-et vagy A_n-et generálja, illetve, hogy két páros permutáció A_n-et generálja.

T7. Robert Guralnick és Maróti Attila választ adott Neumann 1966-ban feltett kérdésére, meghatározva a fixpontterek átlagos dimenzióját.

T8. Abszolút feloldható csoportokkal kapcsolatban Pálfy Péter Pál példákat mutatott egy csoport olyan normálosztóira, amelyek maguk abszolút feloldhatók, szorzatuk azonban nem az. Megvizsgálta az abszolút feloldható csoportok osztálya és az M-csoportok közötti kapcsolatot is.

T9. Praeger, Pyber, Spiga és Szabó fontos előrehaladást ért el a Weiss-sejtéssel kapcsolatban, ami úgy szól, hogy ha a G csoport tranzitívan hat egy k-reguláris gráf csúcshalmazán és a pontstabilizátor a szomszédos csúcsok halmazán primitíven hat, akkor a stabilizátor mérete k-ban korlátos.

Invariánsok elmélete

9. Domokos Mátyás és Szabó Endre lineáris algebrai csoportok Helly-dimenzióját tanulmányozták, és alkalmazták G-varietások szorzatainak vizsgálatára. Belátták, hogy minden algebrai csoporthoz van olyan k egész szám, hogy ha akármilyen számú csoportbeli zárt mellékosztálynak nincs közös eleme, akkor ezen mellékosztályok közül kiválasztható k olyan, amelyeknek szintén üres a metszete. Többek között bebizonyí-

tották, hogy ha G a komplex test feletti 2 rangú általános lineáris csoport, akkor G-varietások tetszőleges szorzatában bármely olyan pont, amelynek a G-orbitja zárt, levetíthető legfeljebb öt komponensre úgy, hogy a kép G-orbitja továbbra is zárt, és az eredetivel azonos dimenziójú. A komponensek számára adott 5-ös korlát tovább nem élesíthető. A Helly-dimenzió végességét is figyelembe véve, innen korlát nyerhető a G-varietások polinom-invariánsainak szétválasztó rendszeréhez szükséges változók számára.

10. Lax Péter megközelítését továbbfejlesztve, Domokos Mátyás az ortogonális csoportok reprezentációelméletét felhasználva bebizonyította, hogy az n-szer n-es valós szimmetrikus mátrixok diszkriminánsát fel lehet írni négyzetek összegeként, ahol a tagok száma nem más, mint az n-edfokú n-változós gömbharmonikus függvények terének dimenziója. Ezzel a tagok számára vonatkozó, korábban ismert korlátokat jelentősen csökkentette. A probléma Kummer 1843-as dolgozatától eredeztethető, ahol azt mutatta meg, hogy 3-szor 3-as mátrixok esetében a diszkrimináns hét négyzet összegére bontható. Domokos ezt a másfél évszázados eredményt is megjavította, megmutatván, hogy ebben az esetben öt négyzet is elegendő.

Már a XIX. századból ismert volt a multiszimmetrikus polinomok algebrájának minimális generátorrendszere, ám a közöttük fennálló relációk ideáljának nem volt megfelelő leírása. Domokos Mátyás Puskás Annával közösen a háromdimenziós esetben meghatározta a relációk ideáljának minimális generátorrendszerét; megmutatták, hogy egy ötödfokú reláció polarizációi és két hatodfokú reláció generálják ezt az ideált. Magasabb dimenziókban alsó korlátot adtak a szükséges relációk fokszámára.

A kovariánsok (azaz algebrai varietások közötti ekvivariáns leképezések, amelyeken egy csoport hat) segítségével Domokos Mátyás általánosított egy alapvetően fontos lemmát, amelyet gyakran használnak a következő kérdés vizsgálatánál: Adott egy csoport hatása egy vektortéren, mikor lesz az invariánsoknak megfelelő test tisztán transzcendens? Reduktív csoportok esetén a módszer konstruktívvá tehető, és az ekvivariáns vektornyalábok trivializációját adja affin nyílt halmazok felett.

11. A véges csoportok polinominvariánsainak algebráját generáló polinomok fokszámára vonatkozó korláttal kapcsolatban Domokos Mátyás doktorandusza, Cziszter Kálmán ért el új eredményeket, de ezek még publikálatlanok.

Frenkel Péter invariánselméleti eredményei egy német kiadónál könyvalakban is megjelentek.

Gyűrűelmélet

12. Ebben a témában (Cuntz-, Leavitt-, és Cohn-algebrák vizsgálata) nem sikerült számottevően előrelépnünk.

13. Pham Ngoc Ánh, Márki László és Vámos Péter kidolgozták a gyűrűk kévereprezentációinak az általános Bezout-félcsoportokra vonatkozó megfelelőjét. Axiomatizálták a klasszikus gyűrűelméleti multiplikatív elméleteket (főideálgyűrűk, Dedekind-gyűrűk, értékelési gyűrűk, Prüfer-gyűrűk) Bezout-monoidként. Leírták ezek alapvető tulajdonságait, homomorfizmusait, valamint szerkezetét teljesen rendezett, ill. felbonthatatlan Bezout-monoidok Grothendieck-, ill. Pierce-kévéjeként. Továbbá megmutatták, hogy minden félig-öröklődő Bezout-monoid reprezentálható egy alkal-

mas félig-öröklődő Bezout-gyűrű multiplikatív szerkezeteként, azaz bijekció létesíthető a félig-öröklődő gyűrűk és a félig-öröklődő Bezout-monoidok között.

Ánh és Siddoway kidolgozták a félig-öröklődő gyűrűk oszthatósági elméletét is.

14. G. Janelidze és Márki László szimpliciális halmazok segítségével megadta a faktorizációs rendszerek és a Kuros–Amitsur-radikálok közös általánosítását: a faktorizációs rendszer fogalmát kiterjesztették kategóriákról tetszőleges szimpliciális halmazokra és megmutatták, hogy ez a konstrukció egy alkalmas kategória rövid egzakt sorozatainak megfelelően definiált szimpliciális halmazán éppen a Kuros–Amitsur-radikál fogalmát adja.

15. Lakatos Piroska a reprezentációelméletben bevezetett Coxeter transzformáció spektrális tulajdonságait tanulmányozta. Belátta, hogy a körmentesen irányított általánosított csillag gráfokhoz tartozó Coxeter transzformáció spektrális sugara mindig Salem-szám, s ezzel a Salem-számokra egy új konstrukciós módszert sikerült találnia.

További eredményeink a gyűrűelméletben:

T10. Pham Ngoc Ánh és Leon van Wyk bevezette az erősen felbonthatatlan gyűrű fogalmát és leírta az általánosított 2×2-es felső háromszögmátrix-gyűrűnek az automorfizmuscsoportját a főátlóban levő erősen felbonthatatlan gyűrűk és a jobbfelső sarokban levő bimodulus automorfizmuscsoportjának segítségével.

T11. Andrea Lucchini és Maróti Attila leírták azokat a gyűrűket, amelyek előállnak, mint három valódi részgyűrűjük egyesítése.

Lie-algebrák elmélete

16. Ebben a témában (kommutativitás és szimultán diagonalizálás) nem született lényeges új eredmény.

17. Fialowski Alice M. Penkavával és M. Phillipsonnal közös munkájában a Lie-algebrák deformációinak kutatását kiterjesztette asszociatív algebrákra is.

Fialowski és Wagemann meghatározta a Connes–Moscovici-féle Hopf-algebra egyetelen infinitezimális deformációját.

További eredményünk az algebrák elméletében:

T12. Brunshidle, Fialowski, Frinak, Penkava és Wackwitz bebizonyították az „algebra alaptételét” Z_2-fokszámozott asszociatív algebrákra.

Hurkok [„loop”-ok] elmélete

18. Moufang-loopokkal kapcsolatban Csörgő Piroska a következő eredményeket érte el: Legyen egy Q Moufang-loop nukleusza $N(Q)$. Ha $Q/N(Q)$ centruma nemtriviális, akkor Q centruma szintén nemtriviális. Ennek alapján szükséges és elégséges feltételek nyerhetők véges Moufang-loopok centrális, illetve nukleáris nilpotenciájára nézve.

19. Csörgő Piroska és Aleš Drápal gyűrűelméleti alapon olyan 128-elemű Buchsteiner-loopot konstruált, amely nem konjugált-zárt (CC). Másrészt megmutatták, hogy minden 2 nilpotenciaosztályú Buchsteiner-loop CC tulajdonságú.

Csörgő leírta azoknak a Buchsteiner-loopoknak a struktúráját, amelyeknek a belső leképezés-csoportja kommutatív.

20. Szintén Csörgő eredménye, hogy ha egy véges kommutatív automorf loop elemszáma páratlan p prímszám hatványa, akkor a loop szorzáscsoportja p-csoport, ennélfogva a loop centrálisan nilpotens.

Univerzális algebra

Az univerzális algebrában az eredetileg tervezettől eltérően a következő témában folyt kutatás:

T13. K. Kaarli és Márki László egy meglepő mátrixkonstrukció segítségével jellemezte az aritmetikai varietást generáló véges minimális algebrák bi-kongruencia monoidjait szolgáltató inverz monoidokat.

További algebrai eredményeink

T14. Kiss Emil több társszerzővel ért el érdekes eredményeket azzal kapcsolatban, hogy Z^n mely vektorai szerepelhetnek páronként ortogonális, azonos hosszúságú vektorokból álló rendszerekben. A négydimenziós eset a kvaterniók algebrájának alkalmazásán alapul.

T15. V. Laan és Márki László számos Morita-invariáns tulajdonságot talált lokálisan egységelemes félcsoportokban. Közülük a legmeglepőbb, hogy bizonyos típusú lokális egységelemek létezése esetén a félcsoport kongruenciahálója is Morita-invariáns. A Morita-ekvivalenciát Rees-mátrix fedés segítségével is jellemezték.

T16. Janelidze, Márki, Tholen és Ursini megoldották a félig-Abel-féle kategóriák alapvetésében megmaradt egyetlen nyitott kérdést, megmutatták, hogy az ún. Hofmann-axióma független a többi axiómától.