

## “Csoportgyűrűk”

**A kutatás eredményei.** Pályázatunkban a következő témaköröket vizsgáltuk: véges csoportok és véges dimenziós algebrák reprezentációelmélete, az egészszámok feletti csoportgyűrűk egységcsoportja, csoportalgebrák és keresztszorzatok, komputer algebra és ennek alkalmazása a felsorolt témakörökben. A jelen kutatások a T037202 és T025029 számú OTKA pályázatok szerves folytatása. Ezen témaköröket intenzíven vizsgálják az Egyesült Államokban, Brazíliában, Európa számos országában és Japánban. Több eredményünket ezekkel a kutató csoportokkal közösen értük el.

A következő témakörökben értünk el eredményeket:

1. Zassenhaus sejtését vizsgáltuk a GAP programcsomag segítségével, azaz azt a kérdést, miszerint az egész számok csoportgyűrűjében minden torzió egység racionálisan konjugált az alapcsoport valamely elemével. Felhasználva I.S. Luthar és I.B.S. Passi által adott számítási eljárásokat és ezek továbbfejlesztését, a Rudvalis, Held, O’Nam, McLaughlin, Suzuki, Higman-Sims, Mathieu M22, M23 és M24, a három Conway és a három Janko egyszerű sporadikus csoport csoportgyűrűiben végeztük el a fent említett Zassenhaus probléma vizsgálatát. Eredményként az egyszerű gráfokról megfogalmazott Kimmerle probléma megoldását kaptuk. Új eredmények születtek az egész számok feletti csoportgyűrűk torzió egységeiről a fent említett egyszerű sporadikus csoportok esetében.
2. Leírtuk a  $KG$  csoportgyűrűk struktúráját, abban az esetben, amikor az  $U(KG)$  egységcsoport hiperbolikus Gromov értelemben. Ezzel e problémával több szerző is foglalkozott, de csak részeredményeket értek el. Nekünk sikerült teljes megoldást adni erre a problémára.
3. Az előző kutatásokat folytattuk és kiterjesztettük a  $V(KG)$  normalizált egységcsoport tanulmányozására véges  $G$   $p$ -csoportok esetén. Egy nagyon régi problémára adtunk megoldást, azaz jellemzést adtunk arra, hogy mikor lesz a  $V(KG)$   $p$ -csoport hatványteljes.

4. Legyen  $L$  egy véges dimenziós,  $p$ -nilpotens és  $p$  karakterisztikájú korlátos Lie-algebra. Az  $L$  Lie-algebra  $u(L)$  burkoló algebrájának filteres multiplikatív bázisát vizsgáltuk és a bázis létezését igazoltuk azokban az esetekben, amikor  $L$  vagy korlátos Abel, vagy teljes hatványú, vagy kettő osztályú nilpotens Lie algebra.
5. Vizsgáltuk a csoportalgebrák és keresztszorzatok Lie nilpotenciáját és annak Lie nilpotencia indexét. Teljes leírást adtunk arra a kérdésre, hogy mikor lesz a keresztszorzat algebra Lie-nilpotens és korlátos Engel. Ezeket az eredményeket alkalmaztuk a nilpotens egységcsoport leírására.
6. A Lie nilpotens  $KG$  csoportalgebra felső és alsó Lie nilpotencia indexe nem nagyobb, mint  $|G|+1$ , ahol  $|G|$  a kommutator-részcsoporthoz tartozó rendje. Az előző OTKA pályázatban azon  $G$  csoportok leírását adtuk meg, amelyek csoportalgebráinak a felső és alsó Lie nilpotencia indexe maximális vagy majdnem maximális. Jelen OTKA pályázatban további jelentős eredményeket sikerült elérni. Meghatároztuk azokat a  $G$  csoportokat, amelyek csoportalgebráinak a felső és az alsó Lie nilpotencia indexe legfeljebb hárommal kisebb a maximális vagy majdnem maximális indexeknél. Ebben az esetben a Lie nilpotencia indexek a következő értékeket veszik fel:  $|G|-4p+5$ ,  $|G|-3p+4$ , vagy  $|G|-2p+3$ . Alkalmaztuk ezeket az eredményeket az egységcsoport nilpotencia osztályának a meghatározására, és teljes leírást adtunk arra a kérdésre, hogy mikor lesz a csoportalgebra egységcsoportjának nilpotencia indexe  $|G|-4p+4$ ,  $|G|-3p+3$ , vagy  $|G|-2p+2$ .
7. A  $GL(n, K)$  lineáris csoport részcsoportjait tanulmányoztuk, abban az esetben amikor  $K$  vagy az egész számok gyűrűje, vagy lokalizációja 2 prím szerint, vagy a 2-adikus egész számok gyűrűje. A felbonthatatlan nem ciklikus negyedrendű részcsoportjait írtuk le konjugálás erejéig. Jelen eredmény Nazárova 1964-ben elért klasszikus eredményét egyszerűsíti.
8. Továbbfejlesztettük és elkészítettünk egy újabb verzióját a GAP (<http://www.gap-system.org>) komputer algebra rendszer LAGUNA (<http://www.cs.st-andrews.ac.uk/~alexk/laguna.htm>) program csomagjának (verziószáma: 3.5.0). Ennek segítségével csoportalgebrákban és azok egységcsoportjában végeztünk számításokat a GAP rendszeren. A LAGUNA fő célja, hogy képesek legyünk számításokat végezni bármely csoportalgebra asszociált Lie algebrájában. A LAGUNA részével lehetőségünk van bizonyos Lie tulajdonságok ellenőrzésére, Lie

invariánsok hatékony meghatározására. A programcsomagra több mint 40 hivatkozás történt, ami azt mutatja, hogy többen is eredményesen alkalmazzák a kutatásaikban. A programcsomag új verziója új függvényekkel gazdagodott, új eljárásokkal és algoritmusokkal bővült és most már tartalmazza a moduláris csoportalgebrák egységcsoportjainak könyvtárát bizonyos 2-csoportok esetén is.

**Előadások:** A következő konferenciákon és egyéb rendezvényeken vettünk részt és tartottunk előadást:

- Conference, "Algebras, Representations and Applications" Lie and Jordan Algebras, their Representations and Applications - III, Maresias, Brazil, August, 2007
- Seminar, IMPA, Rio de Janeiro, Brazil, September, 2007
- Seminar, UnB, University of Brazilia, Brazil, September, 2007
- Seminar, IME, University of Sao Paulo, Brazil, October, 2007
- Mini-Workshop, Arithmetik von Gruppenringen, Oberwolfach, Germany, November, 25- December, 1st, 2007, 1660—8933
- Seminar, Department of Algebra, University of Uzhgorod, Uzhgorod, February, 2008
- International Conference "ISCHIA GROUP THEORY 2008", Ischia (Naples), Italy, March, 29th - April, 1st, 2008 (<http://www.dmi.unisa.it/ischia2008/>)
- Seminar, Universidad Nacional Autónoma de México, Cuernavaca, Mexico, May 2008
- Conference, „Rings and Modules” in honour of P.F. Smith's 65th birthday Comp. Inter. da Universidade de Lisboa, 16th-19th, September 2008 (<http://pfs2008.cii.fc.ul.pt>)
- Seminar, Department of Mathematics, University of Porto, Portugal, September 2008
- Seminar, Dep. of Mathematics, University of Edinburgh, Scotland, September 2008
- International Conference on Automata, Languages and Related Topics, University of Debrecen, Hungary, October 21—24, 2008 <http://www.inf.unideb.hu/pali65/>
- Seminar, IME, University of Sao Paulo, Brazil, November 2008
- Seminar, University of Amazonas, Manaus, Brazil, November 2008
- Seminar, UnB, University of Brasilia, Brazil, November 2008
- Seminar, IMPA, Rio de Janeiro, Brazil, January 2008
- Seminar, Renyi Institute, Budapest, Hungary, March, 2009
- Seminar, Technical Institute of Sligo, Ireland, May, 2009

- Seminar, Department of Mathematics, St Andrews, Scotland, September 2009
- "Arithmetic of group rings and related structures", at the RWTH Aachen University  
March 22—March 26, 2010
- ISCHIA GROUP THEORY 2010, NH Ischia Thermal SPA Resort (ex Jolly Hotel),  
Ischia, Naples – Italy, April, 14th - 17th, 2010 <http://www.dmi.unisa.it/ischia2010/>
- GROUPS AND THEIR ACTIONS, Bedlewo (near Poznan), Poland, August 23-28, 2010  
<http://mat.polsl.pl/groups/>
- Seminar, Technical Institute of Sligo, Ireland, September, 2010
- Seminar, University of Galway, NUI Galway, Ireland, February, 2011
- Seminar, Technical Institute of Sligo, Ireland, February, 2011
- Seminar, Department of Mathematics, University of Al Ain, UAE, April, 2011
- Seminar, UnB, University of Brazilia, Brazil, June, 2011
- Seminar, IME, University of Sao Paulo, Brazil, June, 2011
- Seminar, UFES, University of Vitoria, Vitoria, Brazil, August, 2011