

## A kutatás eredményei (záró beszámoló)

A **K 68311 sz.** OTKA pályázatot (a kutatás időtartama: 2007.07.01. – 2011.06.30.))  
A Miskolci Egyetem Matematikai Intézet Analízis Tanszéke 1 oktatója -  
Dr. Rontó Miklós egyetemi tanár , a matematikai tudományok doktora- nyerte el.

A pályázat általános alakú nemlineáris közönséges differenciálegyenlet-rendszerekhez illetve lineáris funkcionál- differenciálegyenlet rendszerekhez rendelt peremérték-feladatok megoldásainak vizsgálatával foglalkozik. A fő hangsúlyt lokálisan Lipschitz-rendszerekre helyezzük.

Kiemelten kezeljük az interpolációs típusú peremfeltételeket, a lineáris általános alakú kétpontos és többpontos peremfeltételeket, a különböző típusú kétpontos nemlineáris peremfeltételeket, a Cauchy-Nicoletti-féle feltételeket, illetve a paramétert tartalmazó peremérték-feladatokat. Kutatásaink kimutatták, hogy a sorozatos közelítésen alapuló saját fejlesztésű numerikus –analitikus módszereink az egzisztencia vizsgálatban illetve a megoldás közelítő meghatározása során felhasználhatók akkor is, amikor más csoportokhoz tartozó módszerek alkalmazhatóságát biztosító feltételek nem teljesülnek.

Kidolgoztunk egy paraméterezési technikát, amely segítségével egyszerűbben tudjuk kezelni a szinguláris mátrixokat tartalmazó két és három pontos lineáris peremfeltételeket. A szóban forgó paraméterezési eljárás igen hasznosnak bizonyult erősen nemlineáris feladatoknál is, amikor az adott peremfeltételek szintén nemlineárisak. A módszerünk segítségével a nemlineáris kétpontos vagy hárompontos peremfeltételek visszavezethetők egy egyszerűbb feladatra, ahol a transzformált nemlineáris differenciálegyenlet-rendszert már kétpontos lineáris peremfeltételekkel kell tanulmányozni. Ezen kívül a módosított feladathoz egy algebrai (vagy transzcendens) egyenletrendszer egyszeri megoldása tartozik, melynek dimenziója megegyezik a bevezetett paraméterek számával.

Periodikus peremfeltételek mellett nem-autonóm differenciálegyenlet- rendszerek esetén kimutattuk a megoldások bizonyos általánosított szimmetrikus tulajdonságait. Ez a szimmetria speciális esetként magába foglalja a páros, páratlan és más ismert tulajdonságokat.

A munkatervben vállalt program szerint a kutatás célja az alábbi fontosabb pontokból áll :

1. Folytatni a paraméteres nemlineáris peremérték-feladatok megoldásainak tanulmányozását, abban az esetben, amikor mind a közönséges differenciálegyenlet-rendszerben, mind a kétpontos lineáris nem szétválasztható peremfeltételekben paraméterek szerepelnek. Az ilyen általánosított sajátérték feladatok megoldásainak egzisztencia vizsgálatára és közelítő meghatározására saját fejlesztésű, sorozatos közelítéseken alapuló módszereket alapozunk meg. A fő hangsúlyt lokálisan Lipschitz –rendszerekre helyezzük, amikor például a shooting típusú eljárások alkalmazhatósági elégséges feltétele nem teljesül, vagy a simasági feltételek nélkülözése, vagy a megoldásnak az adott intervallumra való automatikus kiterjesztésének lehetősége miatt.

2. Olyan nemlineáris peremérték-feladatok vizsgálatával kívánunk foglalkozni, amelyekben mind a közönséges differenciálegyenlet-rendszer, mind a nem szétválasztható kétpontos peremfeltételek nemlineárisak. Kimutatjuk, hogy az ilyen általános alakú erősen nemlineáris peremérték-problémák visszavezethetők egy megfelelően előállított nemlineáris differenciálegyenlet-rendszerhez rendelt feladathoz, de már lineáris peremfeltételekkel ,

amelyhez hozzátartozik még egy ún. meghatározó nemlineáris algebrai egyenletrendszer, melynek dimenziója megegyezik az adott differenciálegyenletek számával. Új egzisztencia tételeket bizonyítunk, illetve a gyakorlati számításokra alkalmas analitikus algoritmusokat alapozunk meg.

3. Általánosítani tervezzük módszerünket többpontos (hárompontos) nemlineáris peremérték-feladatokra. Itt az alapgondolat – megfelelő paraméterezéssel kétpontos peremérték-feladatra való visszavezetés és ez által az eredeti feladat megoldásának egzisztencia vizsgálata.

4. Bizonyos szimmetrikus tulajdonságokkal rendelkező nem-autonóm differenciálegyenlet-rendszerek esetén tanulmányozni kívánjuk a nemlineáris periodikus peremérték-feladat megoldásának egyes általunk bevezetett ún.  $(\tau, E)$  szimmetrikus tulajdonságait, amely speciális esetként magába foglalja az ismert páros illetve páratlan tulajdonságokat. A szimmetrikus tulajdonság egyben általánosítja a J.K.Hale "Oscillations in Nonlinear Systems", McGraw Hill, New York (1963) könyvében tárgyalt szimmetriát. Megjegyezzük, hogy szakirodalomban csak páratlan szimmetriára ismertek hasonló eredmények. Kimutatjuk, hogy a szóban forgó szimmetria dimenzió-függő tulajdonság és csak egynél magasabb rendű differenciálegyenlet-rendszerekre izgalmas.

A munkatervnek megfelelően a 2007-2008-ban elvégzett kutatások eredményeként továbbfejlesztettük a témavezető által korábban bevezetett ún. sorozatos közelítésen alapuló numerikus-analitikus módszereket.

A szóban forgó eljárás segítségével új egzisztencia tételeket bizonyítottunk általános alakú

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

közönséges nemlineáris differenciálegyenlet-rendszerekhez rendelt különböző típusú reguláris peremérték-feladatok esetén illetve egyenletesen konvergens iterációs eljárást állítottunk elő a megoldás közelítő meghatározására és megadtuk a hibabeclést.

Kiemelten kezeljük a periodikus peremfeltételeket, a lineáris általános alakú kétpontos és többpontos peremfeltételeket, a különböző típusú kétpontos nemlineáris peremfeltételeket, a Cauchy-Nicoletti-féle feltételeket, illetve a paramétert tartalmazó peremérték-feladatokat.

Periodikus peremérték-feladatok esetén sikerült kimutatni a megoldások bizonyos szimmetrikus  $(\tau, E)$  tulajdonságait, amelyek speciális esetként páros illetve páratlan tulajdonságokhoz vezetnek vissza. Ez a szimmetrikus tulajdonság általánosítja a J.K.Hale „Oscillations in Nonlinear Systems” (1963.) könyvében tárgyalt szimmetriát. Kimutattuk, hogy ez a szimmetria dimenzió-függő és egynél több egyenletet tartalmazó differenciálegyenlet-rendszerekre érdekes.

Kidolgoztunk egy paraméterezési technikát, amely segítségével nemlineáris kétpontos

$$g(x(0), x(T)) = d$$

peremfeltételek mellett a nemlineáris peremérték-feladat visszavezethető egy egyszerűbb feladatra, ahol a transzformált differenciálegyenlet-rendszert már kétpontos lineáris peremfeltételekkel kell tanulmányozni. Ezenkívül a transzformált feladathoz egy algebrai (vagy transzcendens) egyenletrendszer egyszerű megoldása tartozik, melynek dimenziója megegyezik a bevezetett paraméterek számával.

A 2009-ben elvégzett kutatások keretében továbbfejlesztettük eredményeinket funkcionál-differenciálegyenlet rendszerekre.

A szóban forgó eljárás segítségével új egzisztencia tételeket bizonyítottunk általános alakú

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{j=1}^k P_j(t) x(\beta_j(t)) + f(t), \quad t \in [0, T], \quad \beta_j : [0, T] \rightarrow [0, T]$$

lineáris funkcionál-differenciálegyenlet rendszerekhez rendelt különböző típusú reguláris kétpontos peremérték-feladatok esetén, illetve egyenletesen konvergens iterációs eljárást állítottunk elő a megoldás közelítő meghatározására és megadtuk a hibabecslést.

Az adott egyenlet-rendszerben az együttható függvények Lebesgue-integrálhatóak a  $[0, T]$  intervallumon, illetve az argumentum-eltérés  $\beta_j$  függvények mérhetőek. Továbbá, ha az argumentum-eltérés  $\beta_j$  függvények az alábbi tulajdonsággal rendelkeznek

$$\inf_{t \in [0, T]} \text{ess} \left[ (\beta_j(t) - t) \text{sign}(t - \frac{T}{2}) \right] \geq 0,$$

akkor sikerült lényegesen pontosabb konvergencia becsléseket bizonyítani.

Folytonos  $\beta_j$  függvények esetén az utóbbi feltétel azt jelenti, hogy  $\beta_j(t) \leq t$ , ha  $t \leq \frac{T}{2}$  és

$$\beta_j(t) \geq t, \quad \text{ha } t \geq \frac{T}{2}, \quad \text{illetve } \beta_j(\frac{T}{2}) = \frac{T}{2}.$$

Kidolgoztunk egy paraméterezési technikát, amely segítségével egyszerűbben tudjuk kezelni a szinguláris mátrixokat tartalmazó két és három pontos lineáris peremfeltételeket. A szóban forgó paraméterezési eljárás igen hasznosnak bizonyult erősen nemlineáris feladatoknál is, amikor az adott peremfeltételek szintén nemlineárisak. A módszerünk segítségével a nemlineáris kétpontos vagy hárompontos peremfeltételek visszavezethetőek egy egyszerűbb feladatra, ahol a transzformált nemlineáris differenciálegyenlet-rendszert már kétpontos lineáris peremfeltételekkel kell tanulmányozni.

Konstruktív egzisztencia tételeket bizonyítottunk általános alakú

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{j=1}^k P_j(t) x(\beta_j(t)) + f(t), \quad t \in [0, T], \quad \beta_j : [0, T] \rightarrow [0, T]$$

lineáris funkcionál-differenciálegyenlet rendszerekhez rendelt hárompontos

$$Ax(0) + Bx(\zeta) + Cx(T) = d$$

peremérték-feladatok esetén.

Az adott egyenlet-rendszerben az együttható függvények Lebesgue-integrálhatóak a  $[0, T]$  intervallumon, illetve az argumentum-eltérés  $\beta_j$  függvények mérhetőek. A

peremfeltételekben az  $A, B, C$  mátrixok mind szingulárisak. Kimutattuk, hogy egy megfelelő paraméterezési technika segítségével célszerű az adott hárompontos feladatot egy kétpontos feladatra visszavezetni. A transzformált feladat közelítő megoldásának meghatározására egy egyenletesen konvergens iterációs eljárást állítottunk elő. A közelítő megoldás tulajdonságai alapján új egzisztencia tételeket bizonyítottunk. Továbbá, ha az argumentum-eltérés  $\beta_j$  függvények az alábbi tulajdonsággal rendelkeznek

$$\text{esssup}_{t \in [0, T]} \frac{\beta_j(t)(T - \beta_j(t))}{t(T - t)} < +\infty,$$

akkor sikerült lényegesen pontosabb konvergencia feltételeket, illetve becsléseket bizonyítani.

A kutatások során folytatódott az együttműködés az Ukrán Nemzeti TA Kijevi Matematikai Kutatóintézet Differenciálegyenletek, illetve a Cseh TA Matematikai Kutatóintézet kutatócsoportjainak tagjaival. E közös kutatások eredményeként közös publikációk is megjelentek, illetve közlésre el lettek fogadva.

Az OTKA-68311 projekt támogatásával sikeresen megrendeztük a *The 4-th International Workshop-2009 „ Constructive methods for non-linear boundary value problems, 1-4 July, 2009, Eger,* nemzetközi konferenciát .

Az OTKA K-68311 nyilvántartási szám feltüntetésével egy **150** oldalas könyvfejezet és **8** cikk jelent meg, illetve **5** dolgozat lett közlésre elfogadva:

1. Rontó A. and **Rontó M.**, *Successive Approximation Techniques in Non-Linear Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations* , **Handbook of Differential Equations, Ordinary Differential Equations**, vol. IV, 441- 592, Edited by F. Batelli and M. Feckan, (2008), Elsevier B.V.
2. **Rontó M.** *On two numerical-analytic methods for the investigation of periodic solutions*, **Periodica Mathematica Hungarica**, Vol. 56 (1), (2008), 121-135.
3. **Ronto M.** and Shchobak N. *On parametrized for a non-linear boundary value problem with separated conditions*, **Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations**, No. 18, (2008), pp.1-16, IF= 0.471
4. Ronto A. and **Ronto M.** *Successive approximation method for some linear boundary value problems for differential equations with a special type of argument deviations*, **Miskolc Mathematical Notes**, vol. **10** , No.1(2009), 69-95.
5. Ronto A. and **Ronto M.** *On a Cauchy –Nicolett type three-point boundary value problem for linear differential equations with with argument deviations*, **Miskolc Mathematical Notes**, vol. **10** , No.2 (2009), 173-205
6. Rontó M., Shchobak N. and Marinets. K. *On parametrization of Cauchy-Nicoletti type boundary- value problems*, **Scientific Transactions of the [Uzhgorod National University](#), Mathematical Series**, Vol.16, (2008), 163-173 (in Ukrainian)
7. **Ronto M.** and Shchobak N. *Parametrization for some boundary value problems of interpolation type*, **Tatra Mt. Math. Publ.** **43**, (2009),229-242
8. Ronto A. and **Rontó M.** *Successive approximation technique for investigation of solutions of some boundary value problems for functional-differential equations with special deviation of argument*, Special Issue of International **Journal of Qualitative Theory of Differential Equations and Applications**, vol.3, No.1, (2009), 127-139
9. **Ronto M.**, *On parametrization for some linear three-point boundary value problems with argument deviation*, **Annales Univ. Sci. Budapest , Sec. Mathematica** ,**53**, (2010), 97-122
10. Ronto A. and **Ronto M.**, *Existence results for three-point boundary value problems for systems of linear functional differential equations*, **Carpathian Journal of Mathematics**, (2011), (Baia Mare ), to be published (20 pages)
11. Ronto A. and **Ronto M.**, *On non-separated three-point boundary value problems for linear functional differential equations*, **Abstract and Applied Analysis**, (2011), to be published, (18 pages) , IF=1.442

12. Ronto A., **Ronto M.**, Holubova G. and Necesal P., *Numerical-analytic technique for investigation of solutions of some nonlinear equations with Dirichlet conditions*, **Boundary value problems**, to be published, IF=1.047
13. **Rontó M.** and Marinets. K. *On parametrization of boundary value problems with two-point nonlinear restrictions*, **Nonlinear Oscillations**, **14**, (2011) No.4, to be published (in Russian), (35 pages), IF= 0.158
14. **Rontó M.** and Marinets. K. *Application of parametrization in numerical-analytic investigation of solutions of nonlinear boundary value problems*, **Dopovidi of National Academy of Sciences of Ukraine**, to be published (in Russian),( 6 pages)

A projekt témaköréből nemzetközi konferenciákon az alábbi előadások hangzottak el :

1. **Ronto M.** and Shchobak N. *On parametrization for non-linear boundary value problem with separated conditions*, In : Eight Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations, Program and Abstracts, Szeged (June25-28,2007), p.53.
2. **Ronto M.**, Shchobak N. and Marinets K., *On the investigation of Cauchy-Nicoletti type boundary value problems*, In: Book of Abstracts of the International Scientific Conference “Differential Equations, Theory of Functions and their Applications”, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine , Melitopol (Ukraine), 2008 (June 16-21, Melitopol, Ukraine), p.96
3. Ronto A., **Ronto M.**, *Constructive investigation of some linear boundary value problems for differential equations with a special type of argument deviation*, In: Book of Abstracts of the International Conference “Differential and Difference Equations”, Department of Mathematics and Computing Faculty of Information technology University of Pannonia , Veszprem, July 14-17, 2008, p.26.
4. **Ronto M.**, Shchobak N. and Marinets K., *On the numerical-analytic investigation of Cauchy- Nicoletti type boundary value problems*, In: Book of Abstracts of the International Mathematical School “Ljapunov functions and applications”, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine , 2008 ,September 15-20, Simferopol, (Ukraine), p.210
5. **Rontó M.** *Investigation of solutions of some linear functional-differential equations with three-point boundary conditions of Cauchy-Nicoletti type*, In: Book of Abstracts of the International Conference on Interdisciplinary Mathematical and Statistical Techniques , May 23-26 , 2009, University of West Bohemia, Plzen, Czech Republic, p.107
6. Rontó A., **Rontó M.**, *Investigation of solutions of some linear functional-differential equations with Cauchy- Nicoletti type boundary conditions*, The 4-th International Workshop-2009 „ Constructive methods for non-linear boundary value problems, 1-4 July, 2009, Eger.
7. **Ronto M.** and Shchobak N. *Investigation of multipoint non-linear problems with boundary conditions in part of interpolation type*, In: Materials of the International Conference “ The Problems of Calculation Optimization, ISCOPT-XXXV “, Kiev, 2009, (September 24-29, Katsyveli, Crimea), 249-254 (in Russian)

8. **Rontó M.**, *On parametrization for some linear three- point boundary value problems with argument deviation*, **Symposium in Honour of László Simon**, Department of Applied Analysis and Computational Mathematics, Budapest, May 20, 2010.
9. **Rontó M.**, *Investigation of solutions of some linear three-point boundary value problems with several argument deviations*, In. Abstracts of Conference on Differential and Difference Equations and Applications, Rajec Teplice, Slovak republic, June 21-25, 2010, University of Zilina, 36-38 (2010)
10. **Rontó M.**, *Numerical –analytic methods for boundary value problem*, In: Book of Abstracts of the 7<sup>th</sup> International Conference on Applied Mathematics, North University of Baia Mare, Romania , September 1-4, 2010, p.56-57.
11. **Rontó M.** and Marinets K., *On the investigation of boundary value problem with two-point nonlinear conditions* In : International scientific and problem inter-branch conference . Information problems of computer systems, jurisprudence, energetics, economics, modelling and management, May 17-20, 2011, Buchach-Jaremcha, v.7, 140-143, (in Ukrainian)
12. **Rontó M.** and Marinets K., *On investigation of solutions of some boundary value problems with nonlinear restrictions*, In: Book of Abstracts of International Conference : “ Differential equations and their applications”, June 8-10, 2011, Kiev, T.Shevchenko National University, In: Materials of International scientific conference dedicated to the 65 years of differential and integral equations department of Shevchenko National University of Kiev, p.143