OTKA nyilvántartási szám: K 67961

ZÁRÓJELENTÉS

KUTATÁSI EREDMÉNYEK TÉMAKÖRÖK SZERINT

Véletlen bolyongás, Wiener folyamat, additív funkcionálok

Erdős Pál ma már klasszikusnak számító dolgozatai (A. Dvoretzky és S. J. Taylor társszerzőkkel) meghatározták a bolyongás lokális idejének alapvető tulajdonságait. Azóta sokan foglalkoztak az eredmények továbbfejlesztésével, számos nyitott problémát hagyva. A jelen kutatás keretében néhány ilyen problémával foglalkoztunk.

Ismeretes, hogy az egyszerű szimmetrikus bolyongás 1 és 2 dimenzióban rekurrens, magasabb dimenzióban tranziens. A [8] dolgozatban vizsgáltuk az 1 dimenziós egyszerű aszimmetrikus bolyongást, amikor az átmenetvalószínűségek a helytől függetlenek. Ezen tranziens bolyongás maximális lokális idejének aszimptotikus tulajdonságait vizsgáltuk, amelyek hasonlóak a 3 dimenziós szimmetrikus bolyongás maximális lokális idejének tulajdonságaihoz. A [17] dolgozatban vizsgáltuk a nehezebb esetet, mikor az átmenetvalószínűségek függenek a helytől. Meghatároztuk ezen bolyongás lokális idejének pontos eloszlását, ill. határeloszlását. A [18] dolgozatban feltételeket adtunk arra, hogy ez a bolyongás Bessel folyamattal közelíthető az erős approximáció értelmében. A [31] dolgozatban ezen bolyongás elválasztó pontjait vizsgáltuk, kritériumot adva arra, hogy milyen feltételek mellett létezik véges sok, ill. végtelen sok elválasztó pont (cutpoint).

A [15] dolgozatban erős approximációt bizonyítottunk az 1 dimenziós szimmetrikus bolyongás ún. centrált lokális idejére, a $\xi(k,n) - \xi(0,n)$ mennyiségekre. A kapott határfolyamat 1 és 2 paraméteres Wiener folyamatok kombinációja.

A [14] előadásban, valamint a [30] és [44] dolgozatokban az ún. síkbeli fésű struktúrán történő bolyongás tulajdonságaival foglalkoztunk. Az átmenetvalószínűségek itt függenek a helytől oly módon, hogy vízszintes lépések csak az x-tengelyen történhetnek, máshol csak függőlegesen léphet a bolyongó részecske. Az ilyen jellegű bolyongások, amelyek az ún. anizotropikus bolyongás speciális esetei, fizikai alkalmazásoknál merültek fel. [14]-ben erős approximációt és annak következményeit vizsgáljuk, [30]-ban és [43]-ban ezen bolyongás lokális idejével, ill. egy a korábbiaknál általánosabb modellel foglalkozunk. A [43] előadásban vizsgáljuk a síkon, ill. fésűn történő bolyongás keverékét oly módon, hogy vizszintes lépések csak a felső félsíkon, míg függőleges lépések az egész síkon történhetnek.

Általánosabb anizotropikus bolyongással foglalkoztunk a [45] dolgozatban, ahol síkbeli bolyongást vizsgáltunk helytől függő átmenet valószínűségekkel. Heyde (1982) által adott feltételek mellett erős approximációt adtunk a bolyongás komponenseire és vizsgáltuk a lokális idő tulajdonságait.

A [33] dolgozatban a kétparaméteres bolyongás 0-helyeinek aszimptotikus tulajdonságait vizsgáltuk, azokra majdnem biztos határértéktételeket adtunk meg. Megmutattuk, hogy N lépésben a 0-helyek száma közel lineáris, az átlók mentén viszont logaritmikus nagyságrendű.

A [35] dolgozatban a leghosszabb tiszta fej hosszát vizsgáltuk kontinuum számosságú fej-írás sorozatok esetén, az irodalomban dinamikus modellként ismert feltételek mellett. Ezek Erdős-Rényi, ill. Erdős-Révész statikus esetre vonatkozó eredményeinek kiterjesztései.

Erős approximáció függő folyamatokra

Komlós, Major és Tusnády (1975) alapvető eredményei optimális Wiener közelítést adnak független, azonos eloszlású valószínűségi változók részletösszegeire. E tételek a valószínűségszámítás és statisztika leghatékonyabb eszközei közé tartoznak, és függő valószínűségi változókra vonatkozó kiterjesztésüknek rendkívül fontos következményei lennének. Az első függő KMT típusú eredményt Wu (2007) bizonyította be, aki megmutatta, hogy Bernoulli shift alakban előállítható és véges p-edik momentummal ($2 < p \leq 4$) rendelkező (X_n) stacionárius folyamatok egy tág osztályára igaz az 1 valószínűségű $S_n = W(cn) + o(n^{1/p}(\log n)^\gamma)$ approximáció. A bizonyítás a Skorohod beágyazási tételen alapul, és $p > 4$ momentum létezése esetén sem ad jobb hibatagot, mint $O(n^{1/4})$. [41] dolgozatunkban megmutattuk, hogy az approximációban megengedve egy második, az elsőnél kisebb skálázású Wiener folyamatot is, tetszőleges $p > 2$ esetén majdnem elérhető a $o(n^{1/p})$ KMT hibatag. Megmutattuk azt is, hogy egy ilyen kéttagú approximációs tétel következményei lényegében azonosak az eredeti KMT approximációtétel következményeivel. Ennek illusztrálására több új eredményt igazoltunk stacionárius folyamatok rövid intervallumokon való ingadozásaira, valamint stacionárius folyamatok paraméterváltozásának tesztelésére ún. "epidemic" alternatíva mellett.

[12] dolgozatunkban függő stacionárius folyamatok empirikus folyamatának Gauss approximációjával foglalkoztunk, mégpedig a Kiefer féle, kétdimenziós esetben. A tételben feltett keverési feltétel egyszerűbb, mint a szokásos egyenletes keverési feltételek (α, β, ϕ, ρ, stb. mixing) és nemlineáris idősorok tág osztályaira (ARCH, GARCH típusú folyamatok és általánosításaik) teljesül. Eredményeink így igen jól alkalmazhatók az idősorok statisztikájában.

Hézagos sorok

Ismeretes, hogy általános függvénysorozatok ritka részsorozatai úgy viselkednek, mint független valószínűségi változók. Így például, ha $(n_k)_{k\geq 1}$ kielégíti az $n_{k+1}/n_k \geq q > 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ Hadamard hézagfeltételt, akkor a $(\cos n_k x)_{k\geq 1}$ sorozatra teljesül a centrális határeloszlástétel, iterált logaritmus tétel és számos más, független valószínűségi változókra vonatkozó eredmény. Hasonló jelenségek érvényesek más ortogonális rendszerekre, valamint az $f(nx)$ rendszerre, ahol f egy periodikus mérhető függvény. A független változókkal való analógia azonban nem teljes, és az $f(n_k x)$ sorozat aszimptotikus tulajdonságai az $(n_k)_{k\geq 1}$ sorozat számelméleti tulajdonságaitól is lényegesen függnek. Igy pl. Kac (1946) egy nevezetes eredménye szerint sima periodikus f függvény esetén az $f(2^k x)$ sorozatra teljesül a centrális határeloszlástétel, ugyanakkor Erdős és Fortet (1949) megmutatták, hogy ez nem igaz az $f((2^k - 1)x)$ sorozatra. Mint az Salem és Zygmund, Erdős és Gaposhkin alapvető munkáiból kiderül, az $f(n_k x)$ sorozat viselkedése szorosan összefügg az $a_1 n_{k_1} + \cdots + a_p n_{k_p} = b$ alakú diofantoszi egyenletek megoldásszámával, de a fellépő kombinatorikai és számelméleti nehézségek következtében a megoldásszám és a sztochasztikus jelenségek közötti pontos kapcsolat a legtöbb esetben a mai napig ismeretlen maradt. Egy fontos és nehéz eset az $\{n_k x\}$ sorozat diszkrepanciája, melyre Hadamard hézagok esetén teljesül az iterált logaritmus tétel (Philipp 1975), de a tételben szereplő limsup értéke általában különbözik a független változók esetén fellépő 1/2 értéktől (Fukuyama 2008) és egyszerű esetektől eltekintve ismeretlen.

A fenti kérdéskörrel foglalkoztunk [7], [10], [25], [26], [36], [37], [40] dolgozatainkban, és több irányban sikerült lényeges haladást elérnünk. [25]-ben Hadamard hézagok esetén szükséges és elégséges diofantoszi feltételt adtunk arra, hogy az $f(n_k x)$ sorozatra teljesüljön a centrális határeloszlástétel, megoldva ezzel az elmélet egy 60 éve nyitott kérdését. [10]-ben az (n_k) sorozat diszkrepanciájának viselkedésével foglalkoztunk exponenciálisnál lassabban növő (azaz a Hadamard hézagfeltételt nem kielégítő) (n_k) sorozat esetén. Ilyen esetekben az iterált logaritmus tétel nem teljesül (Berkes és Philipp, 1994); [10]-ben megmutattuk, hogy a diszkrepancia nagyságrendje ismét csak az n_k sorozat aritmetikai tulajdonságaitól függ. Nemrégiben Fukuyama (2009) azt a paradox jelenséget figyelte meg, hogy az $f(2^k x)$ sorozatra érvényes centrális határeloszlástétel a sorozat alkalmas permutációja után megszűnik. A hézagos sorok független változókhoz való hasonlósága alapján ez egy rendkívül meglepő jelenség. [37] dolgozatunkban a centrális határeloszlástétel és iterált logaritmus tétel permutáció-invarianciájára adtunk pontos diofantoszi feltételt, Hadamard hézagok esetén. Exponenciálisnál lassabban növő n_k esetén a permutáció-invariancia diofantoszi feltétele igen bonyolulttá válik (egy konkrét példát vizsgáltunk [40]-ben), de [36]-ban megmutattuk, hogy statisztikai értelemben "majdnem minden" n_k sorozat rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

Trimming

Trimming a statisztika egyik régi eljárása, mellyel a statisztikai mintákban előforduló nagy elemek hatása csökkenthető; gyakran használják pl. robusztus becslések konstruálására. A megnyírt i.i.d. sorozatok elméletével a 70-es és 80-as években sokan foglalkoztak és e változók aszimptotikus elméletének legtöbb alapvető problémája megoldást nyert. Az egyetlen kivétel a "modulus trimming" esete, mikor a centrális határeloszlástétel pontos feltétele csak szimmetrikus változók esetén ismert, az általános eset néhány ellenpéldától eltekintve nyitva maradt. [28] dolgozatunkban azt mutatjuk meg, hogy ha véletlen normáló faktort is megengedünk, akkor a stabilis eloszás vonzási tartományába eső változók esetén a centrális határeloszlástétel mindennemű szimmetriafeltétel nélkül igaz. Ennek fontos következményeként igazoljuk, hogy a megnyírt CUSUM statisztika ilyen esetekben aszimptotikusan normális, ami lehetővé teszi több statisztikai próba végtelen szórású változókra való kiterjesztését.

Pszeudovéletlenség és metrikus entrópia

Mauduit és Sárközy 1997-ben bevezették a pszeudovéletlenség egy új mértékét, az ún. "well-distribution measure"-t, mely egy sorozat számtani részsorozatai egyenletes eloszlását méri. [6] dolgozatunkban ezt a fogalmat az egész számok részsorozatainak tetszőleges $\mathcal{A}$ osztályára általánosítottuk, és diszkrepanciára vonatkozó eredményeinket kiterjesztettük ezen új $W_N^{(\mathcal{A})}$ mértékre. Megmutattuk, hogy $W_N^{(\mathcal{A})}$ nagysága szorosan összefügg az $\mathcal{A}$ osztály entrópiafüggvényével és számos becslést adtunk a $W_N^{(\mathcal{A})}(\{n_k\omega\})$ mennyiségre hézagos és nem hézagos (n_k) sorozatok esetén.

Véletlen kombinatorikai struktúrák, gráfok és hipergráfok

A [4] cikkben a Katona és Móri által korábban bevezetett véletlen gráf-modell továbbfejlesztett változatát vizsgáljuk. Korábban már meghatároztuk többek között az aszimptotikus fokszámeloszlást, ezúttal pedig azt vizsgáltuk, hogyan módosul a fokszámeloszlás karakterisztikus kitevője, ha nem az egész gráfban, hanem csak a kiindulási pont közelében levő pontokat figyeljük meg.

Bukszár és Prékopa vezették be az ún. cseresznyefákat, amelyek segítségével Bonferroni-típusú harmadrendű felső becsléseket adtak véletlen események együttes bekövetkezésének valószínűségére. A cseresznyefa fogalmát továbbfejlesztve Bukszár multifákat vizsgált, magasabb rendű korlátok konstruálása céljából. A

[34] cikkben egy az időben fejlődő véletlen rekurzív multifa-folyamatot tekintünk, 'preferential attachment' jellegű dinamikával. Meghatározzuk az aszimptotikus fokszámeloszlást a gráf egészében és a kiindulási konfiguráció szomszédságában is. Amint azt más skálafüggetlen véletlen gráfoknál is tapasztaltuk, a két fokszámeloszlás karakterisztikus kitevője ezúttal sem egyezik meg.

A [4] és a [34] cikkben is tapasztalt jelenség általános okait vizsgálja a [39] cikk. Számos skálafüggetlen véletlen gráfban az aszimptotikus fokszámeloszlás és a karakterisztikus kitevő megváltozik, ha nem a gráf egészét, csak a csúcsok egy kisebb részhalmazát tudjuk megfigyelni. (Ez mutatja a nagyméretű hálózatok statisztikai elemzésének a lehetséges veszélyforrásait.) Igen általános körülmények között elégséges feltételeket adunk arra, hogy a kiválasztott részhalmazon 1 valószínűséggel létezzék aszimptotikus fokszámeloszlás, és meghatározzuk az új karakterisztikus kitevőt is.

A [46] cikkben a következő véletlen gráf-modellt vizsgáljuk: a gráf pontjainak a halmaza $\{1, 2, \ldots, T\}$, és az (i, j) éleket egymástól függetlenül, $p_{i,j}$ valószínűséggel húzzuk be, ahol $\dfrac{p_{t,u}}{1-p_{t,u}} = \alpha_t \alpha_u$, és $\alpha_1, \ldots, \alpha_T$ a gráf pontjaihoz tartozó tetszőleges pozitív súlyok. Ebben a modellben a fokszámsorozat elégséges statisztika. A modellt a legutóbbi időkben egymástól függetlenül többen is bevezették és statisztikai elemzésnek vetették alá. Csatlakozva ezekhez a vizsgálatokhoz megmutatjuk, hogy ha a fokszámsorozat az Erdős–Gallai feltétel által meghatározott politop belsejébe esik, akkor létezik egyértelmű maximum-likelihood becslés az α_i súlyokra és az konzisztens.

A [24] konferenciaelőadásban olyan véletlen modellt vizsgáltunk, amelyet a tudományos publikációs tevékenység motivált. Ez növekvő számú objektumot tartalmaz, melyek véletlen súllyal vannak ellátva. A modell véletlen fejlődését a súlyoktól függő dinamika vezérli, mégpedig oly módon, hogy a súlyok tapasztalati eloszlása 1 valószínűséggel gyengén konvergál, és a határeloszlás farka regulárisan változó. A valószínűségi meggondolások önmagában is érdekes, felújítási típusú rekurzióra, illetve integrálegyenletre vezetnek. Az eredményeket tartalmazó (Backhausz Ágnessel közös) publikáció előkészületben van.

Egyenlőtlenségek

A [2], [3], [9] és [23] cikkben analitikus egyenlőtlenségekkel foglalkozunk, ezek alkalmazásaikban és a bizonyításban felhasznált módszereken keresztül kapcsolódnak a valószínűségszámítás területéhez.

Pachpatte egy cikkében lináris egyenlőtlenségeket bizonyított korlátos zárt intervallumon értelmezett konvex függvényekkel kapcsolatos bizonyos integrálokra. A [3] cikkben ezt megjavítva pontosan meghatározzuk az egyenlőtlenség két oldalán szereplő mennyiségek lehetséges értékeinek a halmazát, ezáltal tovább már nem javítható, éles egyenlőtlenségeket kapunk.

A [2] cikkben a konvexitási módszert szorzatfüggvényekre továbbfejlesztve nemnegatív konvex, illetve konkáv függvények szorzatának integráljára adunk pontos alsó és felső egyenlőtlenségeket a külön-külön vett integrálok szorzatának függvényében. Ezek a becslések élesítik a klasszikus Csebisev- és Grüss-egyenlőtlenséget.

A [9] cikkben nemnegatív számok súlyozott hatványösszege és a súlyozott összegük tetszőleges pozitív függvénye közötti egyenlőtlenségeket bizonyítunk mindkét irányban, ezzel jelentősen általánosítva Qi és Shi korábbi eredményeit.

Q. A. Ngô *et al.* 2006-ban publikálták integrálegyenlőtlenségüket, amely rövid idő leforgása alatt számos általánosítást és továbbfejlesztést ihletett. A [23] cikkben új megközelítést alkalmazva egy messzemenően általánosabb egyenlőtlenséget bizonyítunk, amely speciális esetként tartalmazza az összes korábbi eredményt.

A [19], [20], [21] és [38] cikkekben valószínűségszámítási egyenlőtlenségeket bizonyítunk.

A [19] cikkben ezekre a keverékeloszlásokra vezetünk le Bienaymé–Csebisev-típusú egyenlőtlenségeket, továbbá becslést adunk az origót tartalmazó tetszőleges ellipszishez tartozó valószínűségre is.

A [19] cikkben Csebisev-típusú farokbecsléseket bizonyítunk egy olyan többdimenziós eloszláscsaládra, amely a sztochasztikus modellezésben fontos szerepet játszik, mégpedig a többdimenziós standard normális eloszlás skálatranszformáltjaira. Habár a sokdimenziós véletlen jelenségek matematikai vizsgálatában a többváltozós normális eloszlás rendkívül fontos és népszerű, számos olyan fontos terület van (pl. a biztosítási vagy a pénzügyi matematika), amelyben a szereplő idősorok eloszlása "heavy tail" típusu, így a normális közelítés nem megfelelő. A normális eloszlás skálakeverékei között azonban már heavy tail eloszlások is megtalálhatók. A közölt egyenlőtlenségekben az eloszlás csak a kovarianciamátrixán keresztül szerepel. A szokásos vizsgálatokkal szemben, ahol a keverő eloszlás egy rögzített determinisztikus mátrix véletlen skalárszorosa, itt tetszőleges pozitív definit mátrix értékű keverő eloszlást engedünk meg. Általánosabban, hasonló becslést vezetünk le tetszőleges olyan ellipszoidhoz tartozó valószínűségére, amely tartalmazza az origót.

A [20] cikkben két diszkrét valószínűségeloszlás eltérését vizsgáljuk, ha ismert a generátorfüggvényeik szuprémum-távolsága a $[0, 1]$ intervallumon. Az eloszlások eltérését variációs távolsággal, illetve rögzített k mellett a k-adik tagok különbségével mérjük. Levezetünk mind alsó, mind felső becsléseket. Ilyen jellegű becslésekre akkor van szükség, amikor szita-módszereket alkalmaznak Poissonapproximációhoz. Ehhez a kutatáshoz kapcsolódik a [38] cikk is, amelyben a farokra vonatkozó alkalmas feltételek mellett pontosan tisztázzuk, milyen nagyok lehetnek egy általános valós sorozat tagjai a generátorfüggvény sup-normája függvényében.

A [21] cikkben Csuprunov és Fazekas egy eredményéhez kapcsolódva éles becslést adunk egy valószínűségi változó adott rendű centrális momentumára, ha ismert az ugyanolyan rendű centrális momentum egy másik valószínűségi mértékre vonatkozóan. Külön megvizsgáljuk azt a speciális esetet, amikor a feltételes momentumokat becsüljük a közönséges momentumokkal.

Matematikai modellek az ökológiában

Amikor egy opportunisztikus ragadozó egy adott típusú zsákmányt keres, de egy másik faj egyedével találkozik, kihasználja a véletlenül adódó lehetőséget. A [32] cikkben egy sztochasztikus modell keretében meghatározzuk az opportunizmus optimális szintjét az egy ragadozó, kétféle zsákmány esetben, a zsákmányfajok denzitásának függvényében.

A [47] cikkben egy evolúciós játékot definiálunk, amelyben a bevezetett sztochasztikus modell matematikai elemzése azt mutatja, hogy az irígység és a jótékonyság stratégiája a darwini verseny következményeként adódik.

További eredmények

[29] dolgozatunkban az arkusz szinusz tétel funkcionális változatait igazoljuk függő változók esetén.

[27]-ben alsó-felső osztály eredményeket igazolunk független, azonos eloszlású, standardizált változók $S_n = \sum_{k=1}^n w_k X_k$ súlyozott részletösszegeire, más szóval szükséges és elégséges feltételeket adunk arra, hogy az $S_n \geq s_n \varphi(s_n)$ egyenlőtlenség 1 valószínűséggel végtelen sok n-re teljesüljön, ahol $s_n^2 = \sum_{k=1}^n w_k^2$, és φ egy növekvő függvény. A $w_k = 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ esetre vonatkozó kritériumot Kolmogorov (1935) adta meg. Érdekes módon, a súlyozott esetben nem a w_k súlyok nagyságrendje, hanem a számegyenesen vett eloszlása a lényeges.

Hasonló problémával foglalkozik a [42] cikkünk, ahol szükséges és elégséges feltételt adunk arra, hogy a $\sum_{k=1}^n w_k X_k$ összegekre teljesüljön a nagy számok erős törvénye abban az esetben, amikor a súlyok egy additív számelméleti függvény segítségével vannak megadva.

[5]-ben optimális feltételt adunk arra, hogy egy GARCH folyamatra teljesüljön a centrális határeloszlástétel.

[13]-ban nemstacionárius RCA(1) (véletlen együtthatójú autoregresszív) folyamatok paraméterbecslésével foglalkozunk. Megmutatjuk, hogy a szokásos el-

járásokkal az ε_j hibaváltozók szórása nem becsülhető konzisztensen. Igazoljuk továbbá, hogy a kvázi-maximum likelihood módszer konzisztens és aszimptotikusan normális becslést ad a lokációs és szórásparaméter esetén.

[16]-ban függő valószínűségi változók összegére és annak inverzére vonatkozó Bahadur-Kiefer folyamat integráljára, az ún. Vervaat folyamatra adtunk erős invariancia tételt, általánosítva a független változókra vonatkozó hasonló eredményeket.

[11]-ben egy CUSUM tesztet konstruálunk lineáris folyamatok kovarianciastrukturájának megváltozására.

Végül [1]-ben feltételeket adtunk sztochasztikus rekurrenciával definiált folyamatok stacionaritására, melynek az idősorelméletben vannak alkalmazásai.