2006. év

Megállapítottuk, hogy a Föld pólusának koordináta-változásai, mint egy speciális idősor matematikailag különböző módokon modellezhető. A kiválasztott modell paraméterei a valóban megfigyelt idősorai alapján becsülhetők. A kiválasztott és az illesztett modell eltérése jellemezhető. A becslési módszereknek figyelembe kell venni azt a tényt, hogy a megfigyelt értékek, amelyek alapján becsüljük a modell paramétereit, általában nem függetlenek.

A pólusmozgás analizálására szolgáló szakirodalmi matematikai modelleket tanulmányoztuk. Az időben folytonos és diszkrét egydimenziós stacionárius Gauss-Markov folyamatok statisztikai vizsgálata során kiderült, hogy a pólusmozgás két koordináta-idősorának vizsgálatát egy modellen belül célszerű elvégezni.
A Föld pillanatnyi forgástengelyének egyéves és féléves periódusú mozgásának kiszűrésére az általunk korábban kidolgozott speciális trigonometrikus interpoláció használható. A maradék folyamat u. n. Chandler-féle változása nem pontosan periodikus és az amplitúdója is változik, ezért sztochasztikus differenciálegyenlettel és additív trigonometrikus komponensekkel modellezhető.

A periodikus trend eltávolítása után a maradék pólus-idősor numerikus analízisének eredményei azt mutatják, hogy a Chandler mozgás súrlódás általi csillapítását bizonyos geofizikai folyamatok gerjesztik.

A Föld pólusának mozgását időben folytonos, kétdimenziós stacionárius sztochasztikus folyamatnak modelleztük, amely komplex alakban kezelhető. A folyamat komplex empirikus korrelációs függvényének paramétereire torzítatlan becsléseket adtunk.

A nemlineáris Gauss-Markov modell egyenleteinek megoldása érdekében megteremtettük a számítástechnikai hátteret a Buchberger-féle programrendszer használatához. Teszteltük a nemlineáris egyenletrendszerek megoldására szolgáló algorítmusokat.
A Gauss-Jacobi kombinatorikus kiegyenlítő-számítási elvet a legfontosabb nemlineáris geodéziai transzformációs feladatok megoldására alkalmaztuk. A 2D hasonlósági transzformáció egzakt megoldásáról megmutattuk, hogy megegyezik a súlyozott átlagok alapján kapott megoldással.

Két geodéziai koordinátarendszerben megadott három-három pontpár 7 paraméteres 3D hasonlósági transzformáció esetén valamennyi nemlineáris egyenletrendszerének a megoldására explicite kifejezéseket vezettünk le. A kapott eredményeket kategorizáltuk, és az egyes típusok megoldásának matematikai programjait is kidolgoztuk.

Egy természetes szám *gazdaságos*, ha a prímfaktorizációja (a legalább kettő kitevőkkel együtt) nem igényel több számjegyet, mint maga a szám. Kiterjesztettük azt a korábbi eredményt, mely szerint van tetszőleges hosszúságú gazdaságos számokból álló szelete a természetes számok sorozatának. E kiterjesztés alapján, ha $f_1, f_2, \ldots, f_t$ legalább elsőfokú, egészértékű polinomok, akkor végtelen sok olyan n természetes szám van, melyekre az $|f_1(n)|, |f_2(n)|, \ldots, |f_t(n)|$ polinomiális értékek mindegyike gazdaságos. (Valójában a 2006. évi kutatás 2006-ban jelent meg, de a folyóirat megjelenésének csúszása miatt 2005-re dátumozták vissza.)
A binomiális együtthatókra vonatkozó speciális egyenletet tanulmányozva, beláttuk, hogy bármely adott együtthatók esetében csak véges sok megoldása lehet a kérdéses egyenletnek rögzített feltételekkel, és ezek a megoldások effektíve meghatározhatók. Az effektív végesség a Thue egyenletekre vonatkozó korábbi effektív végességi tételek következménye.

A parabolikus és hiperbolikus parciális differenciálegyenletek numerikus megoldásainak javításán ill. új hatékonyabb módszerek kifejlesztésén dolgoztunk 2006-ban. Mindkét esetben olyan problémák numerikus megoldásain próbáltuk ki az eljárások hatékonyságát, melyek nagy gyakorlati jelentőségűek: hővezetési egyenlet, légszennyezés-terjedési modellek, Maxwell-egyenletek.
A parabolikus egyenletek esetén már ismert volt bizonyos kvalitatív tulajdonságok megőrzésének a fontossága ill. a tulajdonságok feltételei. Általában ezek a feltételek a rácsválasztás geometriájára adnak információt ill. alsó és felső korlátot jelentenek az időlépés megválasztásában. Korábbi eredményeinket általánosítva megmutattuk, hogy forrástagot (emisszió), másod- és elsőrendű deriváltat (diffúzió és advekció) is tartalmazó egyenlet esetén a nemnegativitási tulajdonság ekvivalens a maximum-minimum elvvel. A numerikus megoldásokra (véges differencia és végeselem) is megmutattuk egy az előzőhöz hasonló állítás érvényességét. Ehhez a particionált egylépéses vektoriterációkat kellett vizsgálnunk. Szigorúan nemkeskeny téglalaprácson meghatároztuk azt az időintervallumot, melyből az időlépést választva a végeselemes megoldás teljesíti a maximum-minimum elvet.
A Maxwell-egyenletek esetén fontos kérdés egy elektromágneses modellben a szemidiszkretizációval nyert közönséges differenciálegyenlet-rendszer hatékony (gyors és pontos) megoldása. Ismert, hogy jól alkalmazhatók azok a megoldások, melyek az operátorszeletelési eljáráson alapulnak. Két, a korábbiaknál hatékonyabb módszert is kidolgozunk. Az egyik azon alapul, hogy a Namiki-Zheng-Chen-Zhang módszerbeli részfeladatokat a Strang-Marcsuk szeletelés helyett a szekvenciális szeleteléssel bontjuk fel és a részfeladatokat a Crank-Nicolson módszerrel oldjuk meg numerikusan. A módszer nagy előnye, hogy feltétel nélküli stabilitása a konstrukcióból látszik, ill. az elektromágneses tér energiája állandó marad a számítások közben. A másik módszerben a szimmetrikus szekvenciális szeletelésnél adtunk egy olyan másodrendű módszert, melynek műveletigénye jelentősen csökkenthető párhuzamos gépeken.

2007. év

A korábbi munka folytatásaként, ebben az évben további vizsgálatokat végeztünk a parabolikus és hiperbolikus parciális differenciálegyenletek numerikus megoldásai vizsgálatának terén. Eredményeink ellenőrzésére a hővezetési egyenlet, a légszennyezés-terjedési modellek és a Maxwell-egyenletek szolgáltak tesztfeladatul.
A parabolikus egyenletek numerikus megoldására az ún. előjelstabilitási tulajdonságot vizsgáltuk meg. Korábbi eredményeinket általánosítva divergenciás alakban felírt olyan feladatokat vizsgáltunk, melyben lineáris, a hőmérséklettől függő forrástag szerepel. Mind a véges differenciás, mind pedig a Galjorkin végeselemes módszer esetén elégséges feltételt határoztunk meg a numerikus megoldás előjelstabilitására, azaz megadtuk, hogy milyen térbeli diszkretizációhoz milyen időlépést választhatunk.
Megvizsgáltuk a diszkrét rácsoperátorok kvalitatív tulajdonságait (nemnegativitás, maximumnormabeli kontraktivitás ill. maximum-minimum elv). Az eredményekből kiderült az analógia a folytonos operátorok és a diszkrét rácsoperátorok között, ami könnyen kezelhető feltételekhez vezetett a numerikus megoldások kvalitatív tulajdonságainak garantálásában.
A Maxwell-egyenletek esetén továbbra is az operátorszeletelési eljárások alkalmazhatóságát vizsgáltuk, és több módszerben is javítást sikerült elérnünk. Pl. a közönséges szekvenciális szeletelésről megmutattuk, hogy a kezdeti vektor eltolásával Strang-Marchuk szeleteléssé alakítható, ami azt jelenti, hogy szinte ugyanakkora műveletigénnyel elsőrendű módszer helyett másodrendűt kaphatunk. Megmutattuk, hogy a Kole-Figge-De Raedt módszert egy ügyes trükkel használhatjuk akkor is, ha veszteséges egyenletről van szó. Ha források is szerepelnek az egyenletben, akkor a forrástag leválasztásával hatékony numerikus sémához

jutunk. Ez pl. abban az esetben hasznos, ha a Gautschi-módszerrel oldjuk meg a feladatot, ami homogén egyenletekre az egzakt megoldást adja.
zolgáltatást nyújtanak.

Nagyméretű ponthálózatok (gráfok) összefüggőségi fokának jellemzésére szolgálhat két pont (csúcs) közötti kereszteződésmentes utak maximális száma és a két pont között haladó bármely utat blokkoló sorompók minimális száma. A kidolgozott algoritmusunk namcsak kiszámítja ezt a két paramétert, de egyúttal előállít egy maximális kereszteződésmentes útcsokrot és egy minimális sorompót. Továbbá elemi bizonyítását adja Menger tételének, mely szerint ez a két paraméter egyenlő.

A Diofantikus egyenletekre és egyenletrendszerekre irányuló kutatásainkban a kongruens számok analógiájára magasabbfokú egyenleteket vizsgáltunk és először egy végességi tételt bizonyítottunk a primitív megoldások számára. Egy megoldási algoritmust írtunk le, amely az együtthatók egy osztályára alkalmazható.
A lineáris rekurziók témakörben megjavítottuk a Liptai-Szalay rekurzív sorozatok hatványosztályaira vonatkozó korábbi eredményt.
Az unimodális sorozatok kutatása során kiterjesztettünk néhány korábbi eredményt, amely az általánosított Pascal háromszögben előforduló sorozatok unimodalitását garantálja.

Kimutattuk, hogy a módosított kereszt-korrelációs módszer képes detektálni a légi fényképek sztereopárjaiból levezetett DTM magassági hibáit. Egy textura együtthatót vezettünk be, amely az autokorreláció számítást még robosztusabbá teszi. Az általunk bevezetett medián differncia szűrő igen gyors és hatékony módszer a DTM érzékeny területeinek detektálására, ahol több ellenőrző mérést kell végezni.

Megvizsgáltuk a fotogrammetria és a térinformatika piacvezető cégei (IGI, Inpho, Intergraph, Leica) hardver és szoftver termékeinek teljesítmény-paramétereit. Teszteltük a Google Maps és Google Earth programokat, melyek digitális térkép, digitális felületmodell, légi fénykép és űrfelvétel adatbázissal térinformatikai szolgáltatásokat nyújtanak.

2008. év
Kutatásaink során folytattuk a geodéziában előforduló idősorok analízisének tanulmányozását és a robusztus becslési módszerek geodéziai alkalmazásainak vizsgálatát.

A geodéziai koordinátákból egy pont derékszögű koordináta-rendszerbeli koordinátái kiszámíthatók. Az inverz feladat sokkal bonyolultabb, csak iterációval oldható meg. Megadtuk az inverz feladat nemlineáris modelljét abból a célból, hogy a Gröbner bázisra való áttéréssel a nemlineáris egyenletek szigorú megoldását közvetlenül előállítsuk.

A 7 paraméteres, 3D transzformációs feladat nemlineáris megoldásának felhasználásával igazoltuk, hogy a kovariancia mátrix elméleti becslése előnyösen hat a transzformációs eljárás numerikus pontosságára.

A 4 paraméteres, 2D hasonlósági transzformációra új modellt vezettünk be. Bebizonyítottuk, hogy a skála- és a forgatási paraméter Gröbner bázisú megoldása azonos az analitikus megoldással.

További vizsgálatokat végeztünk a 3D, 7 paraméteres dátum transzformációs probléma direkt megoldásának, és a linearizált legkisebb négyzetek módszerrel előállított megoldásának az összehasonlítására. Monte-Carlo szimulációval megmutattuk, hogy a hagyományos, linearizált megoldás pontosságvesztéssel jár a nemlineáris direkt megoldással szemben.

Az előjelstabilitás az egydimenziós parabolikus feladatok egyik fontos tulajdonsága. Tapasztalataink alapján a belőle származó rácsháló-választási feltétel szigorúbb minden általunk vizsgált más feltételénél. Korábban már adtunk szükséges és elégséges feltételt a lineáris hővezetési egyenlet numerikus megoldásának előjelstabilitására, mind a véges differenciás, mind pedig a lineáris véges elemes esetre. Kiterjesztettük vizsgálatainkat a nemlineáris egyenletek irányába. Egy olyan egyenletre adtuk meg az előjelstabilitás feltételét, ahol a forrástag függött az ismeretlen függvénytől. A vizsgálatokat még csak a véges differenciás esetre végeztük el. A korábbi esetekhez hasonlóan az időlépésre kaptunk felső korlátokat.

A maximum-minimum elvvel kapcsolatban a vegyes peremfeltételű reakciós tagot is tartalmazó parabolikus egyenletekre első ízben megfogalmaztuk a maximum-minimum elvet, megadtuk az elv diszkrét megfelelőjét és elégséges feltételt igazoltunk az elv diszkrét esetbeli teljesülésére a véges elem módszer esetére. Elméleti eredményeinket a numerikus kísérletek is alátámasztották.

Megvizsgáltuk, hogy adott típusú kifejezések hogyan adhatnak Fibonacci számot, ha p prímszám. Beláttuk, hogy bizonyos természetes feltételek mellett csak véges sok, effektíven meghatározható fenti tulajdonságú Fibonacci szám létezik, ha p, a és b mindegyike pozitív egész változó.

Egy új algoritmust adtunk meg szimultán Pell egyenletek megoldására. Elkészült a Magma programcsomagban az algoritmus implementációja, amely viszonylag kis együtthatók esetén automatikusan megadja a megoldásokat. Ismert példákon tesztelve jól működött.

Megmutattuk, hogy az eredeti és bizonyos általánosított Pascal háromszögekben bármely egyenes mentén elhelyezkedő binomiális és általánosított binomiális együtthatók unimodális sorozatot képeznek.

Tanulmányoztuk azokat a különböző a, b, c pozitív egész számokat, melyre ab+1, ac+1 és bc+1 mindegyike ugyanazon nemdegenerált bináris rekurzió tagjai. Beláttuk, hogy rögzített rekurzív sorozat esetén általában csak véges sok ilyen hármas van. Továbbá leírtuk azokat az eseteket, melyeknél végtelen sok fenti tulajdonságú hármas adható meg.

2009. év

Matematikai jellegű kutatásaink egyrészt robusztus becslési módszerek geodéziai alkalmazásainak vizsgálatára, másrészt a geodéziában előforduló idősorok analízisének tanulmányozására oszthatók.

Közismert, hogy a robusztus becslési módszerek nemlineáris egyenletekre vezetnek, amelyeket általában linearizálva, iterációval szokás megoldani. Megmutattuk, hogy néhány geodéziai alapfeladat (távolságmérések, 2D és 3D transzformációk) esetén a nemlineáris egyenletek direkt megoldása is előállítható.

Elemi levezetést adtunk a kiegyenlítő egyenes u. n. totális legkisebb négyzetek módszere szerinti megoldására, és igazoltuk, hogy a megoldás a szakirodalomban tárgyalt eseteknél pontosabb eredményt szolgáltat.

Megalkottuk a 2D Helmert transzformáció totális legkisebb négyzetek módszere szerinti kiegyenlítési modellt, amely szintén nemlineáris problémára vezetett.

Kiegyenlítőszámítási modellek esetén megmutattuk, hogy az totális legkisebb négyzetek módszere a nemlineáris Gauss-Helmert-Modellek szigorú megoldásával azonos eredményt szolgáltat.

Kimutattuk, hogy a totális legkisebb négyzetek módszere egy olyan kiegyenlítőszámítási modell, amelyet a geodéziai kiegyenlítőszámítási módszerek speciális eseteként lehet tárgyalni.

Összehasonlítottuk a totális legkisebb négyzetek módszerét a Huber-féle robusztus becslési modellel, és az adatok kovarianciájától függő nagyobb érzékenységet kaptunk a TLNM javára.

Monte-Carlo szimulációval további vizsgálatok végeztünk a 3D, 7 paraméteres dátum transzformációs probléma nemlineáris megoldásának, és a linearizált legkisebb négyzetek módszerrel előállított megoldásának az összehasonlítására. Megmutattuk, hogy a nemlineáris direkt megoldás pontosabb eredményeket szolgáltat, mint a hagyományos, linearizált megoldás.

A pólusmozgás idősoranalízisének kutatását is tovább folytattuk. Lineáris- és trigonometrikus interpolációval adott frekvenciával rendelkező periódusokat választottunk le. A maradék folyamatot ARMA folyamattal modelleztük. Számításokkal igazoltuk, hogy a maradék folyamatban bizonyos, 10 év fölötti frekvenciák a zajszint fölé emelkedtek.

A parabolikus feladatok numerikus megoldásának előjel-stabilitását vizsgálva megadtuk egy egydimenziós szemilineáris hővezetési egyenlet előjel-stabilitásának feltételeit. Jelenleg a folytonos feladat előjel-stabilitását és a vizsgálatok kiterjeszthetőségét vizsgáljuk a végeselem módszerrel. Az előjel-stabilitás csak az egydimenziós feladatok esetén értelmes kvalitatív tulajdonság, így a magasabb dimenziós feladatok felé fordulva, az előjel-stabilitás általánosításaként, a lokális szélsőértékhelyek számának változásának vizsgálatára tértünk át.

Az operátorszeletelések elméleti kérdései közül megvizsgáltuk az inhomogén egyenletek szeletelésének lokális hibáját. Megállapítottuk, hogy a rend megőrződik, azaz nincs rendcsökkenés az ilyen típusú feladatok esetén. Eredményeinket sikeresen alkalmaztuk a Maxwell egyenletek numerikus (véges differenciás és véges elemes) megoldására. Operátorszeletelések gyakorlatának egyes kérdéseivel is foglalkoztunk, kiemelten a számítógépi realizálás kérdéseit vizsgáltuk.

A nemlineáris geodéziai modellek témakörön belül vizsgáltuk a térbeli előmetszés direkt megoldási módszereit. Kimutattuk, hogy az általános esetben a megoldás első lépésében a redukált Gröbner-bázist alkalmazó módszer a skalár-tényezőtől eltekintve ugyanazokat a negyedfokú egyenleteket szolgáltatja, mint amikor az alapfeladat egyenletrendszerét a rezultánsok Sylvester-féle alakjának alkalmazásával oldjuk meg.

2010 év

Megmutattuk, hogy a 3D, 7 paraméteres Helmert-féle transzformációra általunk levezetett egzakt megoldás a nemlineáris Gauss-Helmert Modell megoldásával egyenértékű eredményeket szolgáltat. Ezzel azt is igazoltuk, hogy a szakirodalomban a GHM-ekre korábban elterjedt levezetések hiányosak voltak.

Monte-Carlo szimulációval megvizsgáltuk, hogy milyen hatása van annak, ha a lineáris regresszió alkalmazásánál nem a megfelelő sztochasztikus modell használatára kerül sor. Eredményül bebizonyosodott, hogy a totális legkisebb négyzetek módszere szolgáltat legpontosabb megoldást.

Megalkottuk a 3D, 7 paraméteres Helmert-féle dátum transzformációs probléma nemlineáris megoldásának kiegyenlítési modelljét.

Megmutattuk, hogy súlyponti koordináták bevezetésével mód nyílik az eltolási paraméterek eliminálására. A 3n egyenletből álló egyenletrendszer speciális tulajdonságait kihasználva a forgatási paramétereket is kiküszöbölhetők, így az eredeti probléma a méretarány tényező megoldására vezethető vissza.

Teljesen új levezetést adtunk a 3D, 7 paraméteres Helmert-féle transzformáció megoldására. A méretarány tényező meghatározása után a feladatot lineárisra redukáltuk, és megadtuk a lineáris probléma kiegyenlítő számítási modelljének megoldását.

A fotogrammetriában használatos külső tájékozási feladat egy új, általános, direkt matematikai levezetését adtuk, amely megoldási módszer összhangban van a 3D, 7 paraméteres Helmert-féle transzformáció megoldásával, de annál lényegesen bonyolultabb. Az általunk kidolgozott eljárás gyakorlati alkalmazása éles feladatokban is alkalmazhatónak bizonyult.

Tekintsük az összes, rögzített együtthatójú bináris rekurzív sorozatot. Arra adtunk szükséges és elégséges feltételt, hogy a fenti halmazból kiválasztott két sorozat szorzatát adott egész számmal eltolva mikor kapjuk a fenti halmaz egy újabb sorozatát. Ezen eredményt felhasználva négy sorozat kombinációját is vizsgáltuk.

Egész számok egy speciális osztályának prímfaktorizációjára adtunk egy új algoritmust, amely lehetőséget ad az RSA algoritmus, vagy a Rabin féle kriptorendszer elleni támadásokra.

A Pascal típusú háromszögekben bármely irányú véges átlók mentén található elemek összegére adtunk leírást rekurzív sorozatok segítségével. A tétel segítségével negatív választ adtunk Horadam egy, a kvázi Morgan-Voyce sorozatokkal kapcsolatos kérdésére.

A parciális differenciálegyenletek numerikus megoldásainak kvalitatív vizsgálata során megadtuk, hogy a folytonos és diszkrét esetben milyen kapcsolat van parabolikus egyenletek esetén az egyes kvalitatív tulajdonságok között. Reakció-diffúziós problémákra először vizsgáltunk olyan feladatokat, amikor mindhárom peremfeltétel jelen lehet. Igazoltuk ezen feladatokra a folytonos maximumelvet, megfogalmaztuk ennek diszkrét változatát, majd megadtuk a diszkrét maximumelvet biztosító, az időlépésre vonatkozó alsó és felső korlátokat és a véges elem diszkretizáció során alkalmazott tetraéderrácsra vonatkozó geometriai feltételeket. Abban az esetben, amikor nincs jelen reakciós tag és nincs Robin-féle peremfeltétel, akkor a rácsra vonatkozóan visszakaptuk a lapszögekre vonatkozó ismert nemtompasági feltételt. Általános esetben viszont szigorúan hegyes szögekre van szükség és új feltételként a rácsméretre is kaptunk egy felső korlátot.

Az operátorszeletelési eljárás rendvizsgálatát kiterjesztettünk olyan feladatokra, amikor a szemidiszkretizáció olyan közönséges differenciálegyenlet-rendszerhez vezet, melynek együtthatómátrixa nem konstans, hanem időfüggő. Megállapítottuk, hogy a szokásos szekvenciális, Strang-Marcsuk és a szimmetrikusan súlyozott szekvenciális szeletelések ezen feladatokra is ugyanolyan rendű (első-, másod-, másodrendű) szeletelési hibát eredményeznek, mint a konstans együtthatós, homogén feladatra. A vizsgálatokhoz a Magnus sorfejtést alkalmaztuk, melynek segítségével a nem-autonóm feladat megoldása exponenciális függvény segítségével írható fel. Különösen hasznosnak bizonyult eredményünk a nemstacionárius anyagi közegben érvényes Maxwell-egyenletek megoldása esetén. Ekkor ugyanis a szemidiszkretizált feladat két olyan részfeladatra bontható, amikor a részfeladatok vagy egzaktul vagy pedig nagyon nagy pontossággal oldhatók meg. Ilyenkor lényegében csak a szeletelésből származik hiba.