Összefoglaló a K60802 pályázat kutatási eredményeiről

1. Összefüggőség-növelés

Az összefüggőség-növelés csoportunk egyik legsikeresebb, központi kutatási témája. Adott egy irányított vagy irányítatlan gráf és egy összefüggőségi igény; célunk ezen igény kielégítése minimális számú él hozzávételével. Csoportunk két tagja, Bernáth és Végh is ehhez kapcsolódó témában védte meg sikeresen a doktori értekezését 2010-ben.

A terület négy alapfeladata irányított illetve irányítatlan gráfokban k-élösszefüggőség illetve k-pontösszefüggőség növelése. A két élösszefüggőség-növelési, valamint az irányított pontösszefüggőségi problémára a nyolcvanas és kilencvenes években polinomiális algoritmusokat találtak, jelentős részben a csoport tagjainak munkájában. Fontos nyitott kérdés azonban a negyedik probléma, az irányítatlan pontösszefüggőség-növelés bonyolultsága. Az eggyel növelés speciális esetét, amikor a kiindulási gráf már eleve $(k-1)$-összefüggő, Végh [70] oldotta meg a közelmúltban. Erről írt cikke a *Symposium on Theory of Computing (STOC)* konferencián 2010-ben a *Danny Lewin Best Student Paper Award*ban részesült. Ebben Frank és Jordán 1994-es sejtését bizonyította. A bizonyítás fontos eszköze Frank és Végh [21] irányított összefüggőség-növelésre vonatkozó eredménye, valamint Fleiner 1997-es, szimmetrikus részbenrendezett halmazok fedésére vonatkozó tétele.

Az irányított pontösszefüggőség növelésére Frank és Jordán 1995-ben adtak min-max formulát és az ellipszoid módszert használó algoritmust. Kombinatorikus algoritmus létezésének kérdése azonban nyitva maradt. Frank és Végh [21] egyszerű kombinatorikus algoritmust adott az eggyel való növelésre; Benczúr és Végh [71] pedig az általános problémára adja az első kombinatorikus algoritmust. Ez utóbbi kiindulási pontja a probléma átfogalmazása speciális részbenrendezett halmazok intervallumokkal való fedésére.

Az összefüggőség-növelési kérdések természetes módon feltehetők hipergráfokra is. Bernáth és Király T. [8] Schrijver szupermoduláris színezési tételét felhasználva algoritmust adtak két ferdén szupermoduláris függvény egyidejű fedésére, ha a két függvény értékének maximuma azonos. Ezen eredmény alkalmazásaként két hipergráf egyidejű élösszefüggőség-növelésére adódik algoritmus. Bernáth [5] azt vizsgálta, hogy az élösszefüggőségre vonatkozó forráselhelyezési eredmények kiterjeszthetők-e hipergráfokra. Megmutatta, hogy mind irányítatlan, mind irányított hipergráfok esetén létezik ilyen kiterjesztés.

Mader és Lovász irányított illetve irányítatlan leemelési tételei az élösszefüggőség-növelési problémák legfontosabb eszközei. Király T. [37] Bertsimas és Teo egy korábbi leemelési tételét továbbgondolva közös megoldási módszert írt le több gráf-növelési illetve útpakolási problémára, melyek közt korábban nem látszott kapcsolat. Bernáth és Király T. [9] a leemelési művelet egy új megközelítését használva megmutatták, hogy hipergráfok különböző összefüggőség-növelési feladatainál az optimális növelés megoldható a hipergráf rangjának legfeljebb eggyel való növelésével.

A polinomiálisan megoldható összefüggőség-növelési feladatok túlnyomó többségében a gráfhoz tetszőleges új él hozzáadható. Ezalól kivétel Bang-Jensen, Jackson, Jordán és Gabow 1999-es eredménye, melyben a partíciókorlátos irányítatlan k-élösszefüggőség-növelésre adtak polinomiális algoritmust. Ebben a feladatban adott a csúcsok egy partíciója, és csak különböző osztályokat összekötő éleket használhatunk. Bernáth, Grappe és Szigeti [6] ezt az eredményt terjesztették ki hipergráf k-élösszefüggővé növelésére gráfélek hozzáadásával, partíciókorlátos feltétel mellett. Ezen eredmény későbbi absztrakt általánosítását adták ugyanők [7] szimmetrikus keresztező szupermoduláris függvények partíciókorlátos fedésére. Ez az eredmény közös általánosítását adja Bang-Jensen et al. cikke mellett Benczúr és Frank szintén 1999-es, szimmetrikus keresztező szupermoduláris függvények fedésére vonatkozó eredményének.

2. Konstruktív karakterizációk

Egy H gráfosztály konstruktív karakterizációján olyan egyszerű gráfműveleteket értünk, melyek segítségével néhány egyszerű kiindulási gráfból elérhető H összes eleme, és minden ilyen módon kapott gráf H-ba tartozik. Egyszerű példa erre a 2-élösszefüggő gráfok fülfelbontása. A konstruktív karakterizációk sok esetben hatékony bizonyítási eszköznek bizonyultak strukturális tulajdonságok vizsgálatánál. Magasabb élösszefüggőségre Mader és Lovász adtak konstruktív karakterizációkat mind irányított, mind irányítatlan gráfok esetére, illetve gyökeres élösszefüggőségre. A globális és gyökeres élösszefüggőség fogalmának természetes közös általánosítása a (k, ℓ)-élösszefüggőség. Frank és Király Z. 2002-es T-páratlan irányításokra vonatkozó cikkének legfontosabb eszköze a $(k, k-1)$-élösszefüggő digráfok konstruktív karakterizációjának megadása, míg Frank és Szegő egy 2003-as eredménye a $(k, 1)$ esetre tartalmazott konstruktív karakterizációt.

Mindezen eredményekből természetes sejtésként fogalmazódott meg az általános (k, ℓ)-élösszefüggőség konstruktív karakterizációjára az alábbi: minden ilyen gráf előállítható egy pontból kiindulva a következő két művelet segítségével: *(i) új él hozzáadása; (ii)* $\ell \leq j \leq k-1$ *meglevő él összecsípése egy új* z *ponttal, és* $k-j$ *új él hozzáadása* z *végponttal.* Kovács és Végh [47] bebizonyították ezt a sejtést. Ez a korábban ismert, egyáltalán nem triviális speciális eseteknél is jóval mélyebb eszközöket igényelt, többek között egy új, absztrakt leemelési tételt.

Az összefüggőséggel bizonyos értelemben ellentétes a $[k, \ell]$-ritkaság fogalma: egy irányítatlan gráfot $[k, \ell]$-ritkának nevezünk, ha minden X részhalmaz legfeljebb $k|X| - \ell$ élt feszít (feltéve, hogy ez a mennyiség nemnegatív). Példa a 2-dimenziós merevségi matroid, ami épp a $[2, 3]$-ritkaságnak felel meg; ennek Hennebergtől származik közismert konstruktív karakterizációja. Frank és Szegő 2003-as eredménye ennek nehéz általánosítását adta $[k, k+1]$-ritka gráfokra. Fekete és Szegő [14] minden $\ell \leq k$ esetére bizonyítottak Henneberg-típusú karakterizációt.

3. Fák és fenyők

Edmonds diszjunkt fenyőkre vonatkozó tételének jelentős kiterjesztését adta Kamiyama [35], amely eredményt Fujishige [22] még tovább általánosította.

Bérczi és Frank a [2] és [3] munkákban feltárta, hogy mi rejtőzik ezen általánosítások hátterében. Beláttak egy olyan absztrakt pakolási eredményt, amelyből a fenti eredmények következnek. Megadták a pakolható részgráfok poliéderes leírását, amelyről igazolták, hogy teljesen duálisan egészértékű. Kidolgoztak továbbá egy erősen polinomiális algoritmust, amely a kapacitásos esetben is hatékonyan találja meg a keresett fenyőket.

Egy digráf legolcsóbb gyökeresen k-pontösszefüggő feszítő részgráfjának megkeresése korábban csak meglehetősen áttételesen, a szubmoduláris áramok segítségével volt lehetséges. [17]-ben Frank egy sokkal természetesebb és algoritmikusan egyszerűen kezelhető konstrukció segítségével megmutatta, hogy a feladat valójában egy súlyozott matroid metszet probléma, amelyre hatékony algoritmusok állnak rendelkezésre.

4. Részgráf problémák

Két fő témakörbe sorolhatók a részgráf problémák területén elért eredmények: a faktorfeladatok körébe, és a diszjunkt A-utak körébe. Mindkét témakörben számos, és szerteágazó eredményeket ért el a csoport, részben külső társszerzőkkel való együttműködés nyomán.

Faktorfeladatokban gráfok egy bizonyos tulajdonságú részgráfját keressük, és a feladat jellegét az határozza meg, milyen tulajdonságot várunk el a részgráftól. Sok esetben az az előírás, hogy a részgráf minden komponense beleessen egy előre megadott családba, melyet a megengedett részgráfok családjának nevezünk. Ezen feladatokat sokféleképpen megközelíthejük: algoritmikusan (hatékony algoritmust adhatunk, vagy beláthatjuk, hogy a feladat NP-teljes), strukturálisan (beláthatjuk, hogy a megoldások valamilyen matroidot, vagy ugrácsot generálnak), az optimalizálás szempontjából (minimális súlyú megoldást keresve), vagy pusztán a megoldás létezése szempontjából.

Egy sokat vizsgált feladat a négyzetmentes 2-faktor keresése páros gráfban, melyre szép min-max formulát adhatunk, mely a halmazpárok fedéséből, vagy Király Z. közvetlen bizonyításából is megkapható. A feladat összefügg a jóval összetettebb pontösszefüggőség-növelés feladattal is, melynek speciális eseteként is megkaphatjuk, lásd például Frank, Végh [58]. A feladatra több algoritmikus megközelítés is adható, melyek közül kiemelkedik Benczúr, Végh halmazpárok fedésére vonatkozó algoritmusa. Speciálisan erre a feladatra szabott algoritmust kaphatunk Pap Gy. [57, 62] eljárásával, mely módszerrel, ahogy az alábbiakban majd kitérünk rá, több másik feladatra is algoritmust kaphatunk. A kapcsolódó optimalizálási feladat egy speciális esetben való megoldását adta Makai [48], megoldva a pontindukált költségfüggvény optimalizálását, nemcsak négyzetmentes 2-faktorokon, hanem K_{tt}-mentes t-párosításokon is. További eredmény Király Z. λ-szupermoduláris függvényekkel való modellezése, melyben egy általános modellt vezetett be, aminek segítségével számos gráf-pakolási feladat esetén egyszerű bizonyítás adható ismert strukturális eredményekre, és többek között ezt a négyzetmentes feladatot is megoldja bizonyos esetekben.

Janata, Szabó [25] az úgynevezett szuper-csillag pakolási feladatot tudta megoldani, mellyel nagyban általánosítják a párosításokra, illetve csillag-pakolásokra vonatkozó min-max, illetve strukturális leírásokat. Részben hasonló módszerrel Király Z., Szabó [45] a feszített részgráfok pakolási feladatát is megoldották, mellyel a propellerpakolási feladatot is általánosítják, és szebb bizonyítást adnak rá. Szabó egy kiemelkedő eredménye úgynevezett k-darabok, azaz fokkorlátos részfák pakolását karakterizálja. Ezzel egy másik irányban tesz lépést a párosítási feladat általánosításában, és felveti a kérdést, hogy az eredmények egyesíthetők-e egy közös általánosításban.

Ide sorolható továbba Kobayashi, Szabó, Takazawa [46] bizonyítása Cunningham egy szép sejtésére, mely egy gráf utakra és 4-nél hosszabb körökre való felbontására vonatkozik. Egy struktúrális eredményt kaptak, mely kimondja, hogy a kapott részgráfok foksorozatai ún. ugrácsot (jump system) alkotnak. Páros gráfok esetén kimutatták, hogy a súlyozott feladat megoldásai egy M-konkáv (diszkrét-konkáv) függvényt alkotnak. Egy rokon feladattal foglalkozott Bérczi, Végh [4], nevezetesen adott t pozitív egészre minden legfeljebb $t+1$ fokú gráfban meg tudják határozni a maximális méretű t-matchinget, melyben nincs $t+1$ csúcsú teljes részgráf, és nincs $t+t$ csúcsú teljes páros részgráf. Ezzel általánosítják Makai páros gráfra vonatkozó eredményének speciális esetét.

Az útpárosítások, illetve páros faktorok feladata a maximális párosítás, és a maximális folyam feladat egy közös általánosítása. A korai eredményeket először Frank, Szegő finomította, majd a csoport több tagja is hozzájárult a feladat mélyebb megértéséhez. Pap Gy. , Szegő [61] ezt a min-maxot általánosította páros faktorokra, melyet korábban Spille, Szegő strukturálisan is jellemzett, aztán Pap Gy. [57, 62] egy erre kihegyezett algoritmust adott, többek között a négyzetmentes feladatra vonatkozó algoritmusa mintájára. A módszer továbbá megoldja azt az esetet is, amikor a páros körökön kívül bizonyos faktorkritikus részgráfokat is bevehetünk a megoldásba.

Páratlan körökkel kiegészített párosítások feladatával foglalkozik Pap Gy. [60], melyben olyan faktorokat engedünk meg, melynek minden komponense vagy egy pont, vagy egy él, vagy egy előre megadott családba tartozó páratlan kör. Ez a súlyozatlan esetben beletartozik az ún. hypo-matching feladatok körébe, melyet a nyolcvanas években Cunningham, Pulleyblank, és Hartvigsen megoldottak. A páratlan körök esetében viszont a feladat élsúlyozott változata is megoldható Pap Gy. [60] módszerével, melyben a feladat által generált poliéder egy nemtriviális, implicit leírását adja.

Az A-utak feladatában egy gráfban kijelölt végponthalmaz pontjait összekötő utakat keresünk, mely feladat a maximális párosítás és a diszjunkt utak közös általánosítása. Az eredeti feladatra Mader tételéből indulhatunk ki, ám számos izgalmas kérdésben volt lehetőség előrelépésre. Az algoritmikus kérdésre korábbi közvetett megközelítések után Pap Gy. [56, 54] adott egy speciálisan erre a feladatra szolgáló algoritmust, melyet az úgynevezett non-returning feladatra is általánosított. Pap Gy. [52] megoldotta Schrijver egy nyitott kérdését, ugyanis belátta, hogy a Mader-féle útpakolások gammoidot generálnak. Pap Gy. [53, 55] erősen polinomiális algoritmust adott a diszjunkt A-utak, illetve multifolyamok feladatára, mind az egészértékű, mind a félegész esetben.

További eredmények:

- Kano, Katona, Szabó [36] a páratlan (1,f)-faktorok létezését, struktúráját vizsgálták, és leírták a duális gátak viszonyát az elemi gráfok faktoraival.
- Frank, Király Z, Kotnyek [19] erősen polinomiális algoritmust adott a csúcs-kapacitásos routing problémára irányítatlan gyűrű-hálózatokban.
- Dvorak, Jendrol, Kral, Pap Gy. [54] egy síkgráf színezési problémát old meg a maximális párosítás feladatra való visszavezetéssel.
- Pap J. [63] 3-hipergráfok segítségével belátta, hogy co-NP-teljes eldönteni, hogy 0-1 vektorok egy halmaza Hilbert-bázist alkot-e.
- Frank, Lau és Szabó [18] néhány soros elemi bizonyítást adott Shirazi és Verstraëte tételére, mely szerint ha egy gráf minden csúcsánál megadunk a fokszám felénél nem több tiltott fokszámértéket, akkor van olyan részgráf, aminek egyig csúcsnál sem tiltott a fokszáma.

5. Matroid partner (matroid parity) feladat

A matroid partner feladatban kiemelkedő kihívást jelent a kombinatorikus optimalizálásban, melynek megközelítésében több részterület eszköztárát is felvonultathatjuk, és alkalmazásaiban szintén több területre hatással van, így például a diszjunkt A-utak, vagy a maximális génuszú beágyazások feladatára. Lovász korai eredményei tisztázták a lineárisan reprezentált matroidok partner feladatait, ám nyitva hagyja azon matroidok esetét, melyek nem reprezentálhatók, vagy reprezentációjuk nem adható meg explicit módon. Szintén nyitott kérdésekkel találkozunk, ha polimatroidokra akarjuk alkalmazni, vagy a feladat tört változatát tekintjük. Ezen kérdések egy részét a csoport munkája révén tisztáztuk.

Gráfok egy paritási feltételt kielégítő irányítását kereshetjük egy matroid partner feladat alkalmazásával, ám ez a feladat nem adható meg lineáris reprezentációval, így Lovász eredményei helyett újfajta megközelítésre volt szükség. Király T, Szabó [41] megadták azon paritásos irányítási feladatokat - a szupermoduláris halmazfüggvényt fedőket -, melyeket egy egyszerű partíciós és kopartíciós feltétellel jellemezhetünk. Makai, Szabó [51] kimutatták, hogy úgynevezett dupla köröket nem tartalmazó polimatroid partner feladat mindig megoldható egy partíciós feltétellel, ezzel kiterjesztve Lovász matroidokra vonatkozó eredményét. Ez bizonyos alkalmazásokra ad lehetőséget, melyek nem jönnek ki Lovász eredeti tételéből. Erre az eredményre algoritmikus megközelítés is adható, lásd Makai, Pap Gy., Szabó [50]. Ezen eredmények tovább általánosítják az imént említett paritásos irányítási tételt, illetve azon keresztül a max génusz feladatot is.

Szabó [68] megoldotta Recski egy sejtését, melyben a matroid partner feladat egy általánosítását veti fel, ahol egy ugrásmentes számsorozattal van megadva, hogy a matroid egy partíciójából hány elemet vehetünk be a független halmazba. A feladatnak két érdekes alkalmazása is adható, egy távközlési hálózatra vonatkozó, illetve egy rúdszerkezet merevségére vonatkozó.

Gijswijt, Pap Gy. [23] a matroid partner feladat tört változatával foglalkoztak, melyet korábban már Vande Vate is definiált. A kapott félegész poliéderről nem volt ismert, hogy szeparálható lenne, és csupán az azonosan 1 súlyfüggvény mellett volt ismert egy optimalizáló algoritmus. Gijswijt, Pap Gy. azonban tetszőleges súlyfüggvényre is adtak egy algoritmust maximális súlyú tört párosítás keresésére. A módszer a jól ismert Magyar Módszer alkalmazása az adott lineáris program esetén.

6. Merevségi problémák

Rúdszerkezetek statikai tulajdonságainak matematikai eszközökkel történő vizsgálata Maxwell (1864) és Henneberg (1911) korai eredményei óta fontos terület. Kiderült, hogy egyrészt egészen más területeken (molekulák szerkezetének vizsgálatában, szenzorhálózatok lokalizációs problémáiban, CAD feladatokban, stb.) is hasznosnak bizonyultak a merevséggel kapcsolatos elméleti eredmények.

Az OTKA pályázatban kombinatorikus módszereket használtunk a merevségre és globális merevségre vonatkozó nyitott kérdések vizsgálatában.

6.1. Merev gráfok és szerkezetek

A (G, p) d-dimenziós *szerkezet* egy G gráfból és egy $p : V \to R^d$ hozzárendelésből áll. A szerkezetre (melyet geometriai gráfnak is neveznek) azt mondjuk, hogy a G egy d-dimenziós *realizációja*. A szerkezetben az éleket egyenes szakaszoknak vagy rudaknak képzeljük, egy él hossza a végpontjainak távolsága. A szerkezet *merev*, ha az adott élhosszakra nézve lokálisan egyértelmű, avagy folytonosan nem deformálható (eltekintve az eltolásoktól, elforgatásoktól, ill. általában az egész tér izometriáitól). A szerkezet merevsége csak a G gráftól függ, amennyiben p *generikus*, azaz a pontok koordinátái kellően általános helyzetűek. A $d = 2$ esetben a merev gráfokat Laman jellemezte (1970). A térbeli (és magasabb dimenziós) merevség pontos jellemzése a terület mai napig megoldatlan nehéz nyitott problémája.

A [27] dolgozat fő eredménye egy új felső korlát a háromdimenziós merevségi matroid rangfüggvényére. Ez gráfok háromdimenziós merevségére ad olyan új szükséges feltételt, amely - legalábbis bizonyos gráfosztályok esetén - elégségesnek is tűnik.

Egy fontos speciális eset a *molekuláris gráfok*, avagy négyzetgráfok családja, melyek merevségére ad feltételt az 1984-ben kitűzött Molekuláris Sejtés. A d-dimenziós térben kettő kodimenziós affin alterek (ú.n. zsanérok) mentén illeszkedő teljes dimenziós merev testekből álló rendszert *d-dimenziós test-zsanér szerkezetnek* nevezzük. Kétdimenzióban tehát összeszögelt síkidomokra, háromdimenzióban egyenes szakaszok mentén összeragasztott testekre gondolhatunk. Egy ilyen szerkezet *mozgása* minden testet külön-külön folytonosan mozgat úgy, hogy az illeszkedő testek egymáshoz viszonyított mozgása a megfelelő zsanér körüli forgatás legyen. A mozgás akkor *triviális*, ha minden test egyformán mozog. A szerkezet akkor *merev*, ha minden mozgása triviális. A szerkezet gráfjában a testeknek pontok, a zsanéroknak élek felelnek meg. Tay és Whiteley 1984-ben megmutatták, hogy egy gráfnak d dimenzióban pontosan akkor van merev test-zsanér realizációja, ha minden élét $\binom{d+1}{2} - 1$ párhuzamos éllel helyettesítve a kapott gráfban lesz $\binom{d+1}{2}$ él-diszjunkt feszítőfa. Ugyanekkor megfogalmazták azt a sejést, hogy ha egy gráfnak van ilyen merev realizációja, akkor olyan is van, amelyben minden testre a rá illeszkedő zsanérok egy közös hipersíkban vannak.

Ez a Molekuláris Sejtés, melynek duális alakja szerint ha egy gráfnak van merev test-zsanér realizációja, akkor olyan is van, amelyben minden testre a rá illeszkedő zsanérok (egyenesek) egy ponton mennek át.

A sejtés minden $d \geq 2$-re nyitott volt. Whiteley ért el részeredményeket a $d = 2$ esetben 1989-ben. A [30] cikkben teljes megoldást adtunk a $d = 2$ esetre. Megoldásunk kulcsa egy ekvivalens, csukló-kollinearitási feltételeket teljesítő, rúd-csukló szerkezet szabadsági fokára adott új képlet volt. Időközben, módszereinket és eredményeinket továbbfejlesztve, a sejtést megoldották: Katoh és Tanigawa japán kutatók cikke megjelenés alatt áll. Az [28], [29], [32] cikkek a háromdimenziós esetre vonatkozó részeredményeket tartalmaznak.

A [33] cikkben hatékony kombinatorikus algoritmust adunk arra, hogyan helyettesítsük egy síkbeli redundánsan merev generikus rúd-csukló szerkezetben a rudakat kötelekkel és rugókkal úgy, hogy a kapott ú.n. *tensegrity szerkezetnek* továbbra is legyen merev realizációja.

Általánosítottuk Lovász és Yemini 1982-es eredményét, amely szerint 6-összefüggő gráfok generikusan merevek a síkban. Az állítás 5-összefüggő gráfokra általában nem érvényes. Kiterjeszthető azonban vegyesen 6-összefüggő gráfokra [31]. (Egy G gráf vegyesen 6-összefüggő, ha minden vegyes vágására, amely az X ponthalmazból és az Y élhalmazból áll, $2|X| + |Y| \geq 6$.)

A merevség fogalmának egyik lehetséges kiterjesztése irányított gráfokra a *perzisztencia*. A [1] cikkben hatékony algoritmust mutatunk annak tesztelésére, hogy irányított gráfok bizonyos osztályai perzisztensek-e a síkban.

Fekete Zsolt [13] polinomidejű algoritmust és minimax tételt adott arra a kérdésre, hogy egy kétdimenziós generikus szerkezetnek minimum hány pontját kell rögzíteni, hogy merev legyen.

6.2. Globálisan merev gráfok és szerkezetek

A (G, p) d-dimenziós szerkezet *globálisan merev*, ha az adott élhosszakra nézve a realizáció globálisan is egyértelmű, azaz minden más d-dimenziós szerkezet ezen élhosszakkal az eredetivel egybevágó. Természetesen minden globálisan merev szerkezet merev, fordítva azonban ez nem mindig érvényes. Generikus, azaz kellően általános helyzetű szerkezetek esetén a globális merevség is csak a G gráftól függ. Ennek igazolása jóval nehezebb a merevségre vonatkozó megfelelő állításnál és a $d \geq 3$ esetre ez csak 2007 óta ismert. A merevséggel való kapcsolatra Hendrickson mutatott rá, aki igazolta, hogy egy d-dimenziós globálisan merev gráf $(d + 1)$-összefüggő és *redundánsan merev*, azaz bármely élét elhagyva is merev. A $d = 2$ esetben ezek a feltételek elégségesek és jellemzik a globális merevséget. Ezt egy korábbi cikkben igazoltuk Bill Jacksonnal. A $d \geq 3$ esetben nem ismert a pontos jellemzés.

A [26] cikk egyik fejezete a globális merevség lehetséges alkalmazásaival foglalkozik szenzor hálózatok lokalizációs problémáiban. Itt az alapfeladat a hálózat csúcspárjainak távolságára és a csúcsok helyzetére vonatkozó részleges információból az összes csúcs pontos helyének meghatározása. Amennyiben a hálózat gráfja globálisan merev és kellő számú csúcs pontos helye ismert, a kapott megoldás egyértelmű lesz. A [26] cikk arra ad feltételeket, hogy bizonyos csúcsok mikor lokalizálhatók egyértelműen, ezzel nagymértékben általánosítva Whiteley és szerzőtársai korábbi megfigyeléseit.

Foglalkoztunk azzal a kérdéssel is, hogyan lehet (nem generikus) globálisan merev szerkezetet készíteni egy globálisan merev gráfhoz. Megmutattuk, hogy a *vertex split* művelet megőrzi a kétdimenziós globális merevséget. Ez Whiteley és Cheung sejtésére adott választ. Ezek az eredmények a [34] cikkben jelennek meg.

7. Stabil párosítások

Gale és Shapley klasszikus stabil párosítási algoritmusa óta az eredeti modellt számos irányba sikerült hatékonyan kiterjeszteni, és a stabil párosítások struktúrájának és tulajdonságainak elemzése az alkalmazott kombinatorika egyik rendkívül termékeny területének bizonyult. Ez a témakör a jelen pályázat kutatásainak is fontos eleme volt. A [11] cikk a stabil párosítási piacok viselkedésének dinamikáját vizsgálja algoritmikus szempontból. Új szereplő csatlakozása esetén a piac egy új stabil állapotba jut el; a cikk azt elemzi, hogy milyen jellemzői vannak ennek az új állapotnak az eredetihez képest, és hogyan állapítható meg, hogy mely piaci szereplők profitálnak a változásból. Ezzel kiterjeszti a korábbi, kétoldalú piacra vonatkozó eredményeket (Roth, Vande Vate).

Szintén a kétoldalú piacról szóló korábbi eredményeket terjesztett ki általános piacokra Fleiner [15]. Crawford, Kelso és Knoer vezették be a kiválasztási függvényen alapuló stabilitási modellt. A cikk megmutatja, hogy ez kiterjeszthető a nem kétoldalú esetre is, és a kiválasztási függvény bizonyos tulajdonságai mellett Irwing stabil párosítási algoritmusának továbbfejlesztésével polinomiális algoritmus is adható a stabil megoldás megtalálására. Az eredmények az IPCO 2008 konferencián szerepeltek.

Új, a korábbiaknál egyszerűbb és hatékonyabb stabil párosítási algoritmust dolgozott ki Király Z. [44] is; ezzel bővebben az Approximációs algoritmusok fejezetben foglalkozunk.

A kétoldalú stabil párosítási probléma poliéderes leírásával foglalkozott Király T. és Pap J. [39]. Megmutatták, hogy a Rothblum által adott lineáris rendszer teljesen duálisan egészértékű, és polinomiális algoritmust adnak az egészértékű optimális duális megoldás megtalálására.

A [16] cikkben Fleiner bevezetett egy újszerű folyam-modellt, ami ahhoz hasonlóan általánosítja a stabil házasítás problémát, ahogy a hálózati folyam feladat általánosítja a párosítás problémát páros gráfban. Bebizonyította, hogy mindig létezik stabil folyam, és a megoldásoknak a stabil párosításokhoz hasonló háló-struktúrája van.

8. Approximációs algoritmusok

A kétoldalú stabil párosítási probléma szigorú preferenciák esetén megoldható Gale és Shapley jól ismert algoritmusával, és könnyen igazolható tétel, hogy minden stabil párosítás ugyanakkora. Ez azonban nem feltétlenül igaz, ha a preferenciáknál döntetlen is megengedett, sőt, ilyenkor a maximális méretű stabil párosítás megtalálása NP-nehéz. Több közelítő algoritmus is született korábban erre a feladatra (Irving és Manlove, illetve Iwama, Miyazaki és Yamauchi). Király Z. [44] egy ezeknél jóval egyszerűbb és jobb approximációs faktort adó algoritmust adott a feladatra. Ez 3/2-közelítést garantál ha csak az egyik oldalon lehetnek döntetlenek, és 5/3-közelítést az általános esetben. A cikk elnyerte az ESA 2008 konferencia Best Paper díját, és a benne szereplő megközelítést azóta több új algoritmusban is sikeresen használták.

Hálózati broadcast feladatok matematikai modelljéhez kapcsolódik az a feladat, amikor egy hipergráfot úgy kell irányítani, hogy egy forrásból a kijelölt csúcsok mindegyikébe kellő számú éldiszjunkt út menjen. Király T. és Lau [40] megmutatta, hogy az utak számának maximalizálása NP-nehéz, azonban 2-közelítő algoritmus adható a feladatra. Hasonló eredményeket bizonyítottak egy rokon feladatra, ahol az éldiszjunktságon túl az utak közös továbbító csúcsot sem használhatnak. Az eredmények a FOCS 2006 konferencián kerültek ismertetésre.

Az utóbbi időben számos eredmény született olyan gráfelméleti optimalizálási feladatokról, ahol fokszámkorlátok hozzáadásával a feladat NP-nehézzé válik, de a fokszámkorlátok kis megsértését megengedve található kis költségű megoldás. Király T., Lau és Singh [38] matroidokra és szubmoduláris áramokra bizonyított ilyen jellegű új eredményeket. A szubmoduláris áramokra vonatkozó tétel szerint ha a fokszámkorlátos feladat LP relaxációjának optimumértéke α, akkor polinom időben található egy olyan, legfeljebb α költségű szubmoduláris áram, ami a fokszámfeltételeket legfeljebb eggyel sérti meg. A matroidokra vonatokzó eredmény a fokszámkorlátoknál általánosabb lineáris feltételeket is megenged, és a feltételek megsértésének mértéke függ e feltételek struktúrájától. A cikk szerepelt az IPCO 2008 konferencián.

9. Díjak és fokozatszerzések

A projekt ideje alatt a résztvevő kutatók számos elismerést kaptak teljesítményükért. Frank Andrásnak az oktatási és kulturális miniszter 2009 januárjában Szent-Györgyi Albert Díjat adományozott, Jordán Tibor pedig 2007-ben Erdős Pál Díjat kapott. 2007-ben két kutató, Pap Gyula és Szabó Jácint is megkapta a Bolyai János Matematikai Társulat Grünwald Emlékérmét, Jüttner Alpár pedig a társulat Farkas Gyula emlékdíját. Pap Gyula 2008-ban, míg Király Tamás 2009-ben kapott Akadémiai Ifjúsági Díjat, előbbi 2009-ben Junior Príma díjban is részesült.

Király Zoltán cikke [44] 2008-ban az European Symposium on Algorithms konferencia Best Paper díját nyerte el, 2010-ben pedig Végh László [70] az ACM Symposium on Theory of Computing (STOC 2010) konferencia Best Student Paper díját kapta.

Jordán Tibor 2007-ben megszerezte az Akadémia Doktora címet. A résztvevők közül a projekt ideje alatt heten szereztek Ph.D. címet, mindannyian az ELTE Matematika Doktori Iskolájában: Jüttner Alpár (2007), Pap Gyula (2007), Szabó Jácint (2007), Fekete Zsolt (2007), Makai Márton (2009), Bernáth Attila (2010), Végh László (2010).

Hivatkozások

[1] J. Bang-Jensen, T. Jordán, *On persistent directed graphs*, Networks, Vol. 52, Issue 4, 271–276, December 2008.

[2] K. Bérczi and A. Frank, *Variations for Lovász' submodular ideas*, in: M. Grötschel, G.O.H. Katona (eds.), Building Bridges Between Mathematics and Computer Science, Bolyai Society, Series: Mathematical Studies, 19, Springer 2008, 137–164.

[3] K. Bérczi and A. Frank, *Disjoint arborescences*, RIMS Kokyuroku Bessatsu, to appear.

[4] K. Bérczi, L.A. Végh, TR-2009-12, *Restricted b-matchings in degree-bounded graphs*

[5] A. Bernáth: *Source location in undirected and directed hypergraphs*, Oper. Res. Lett., 36(3):355–360, 2008.

[6] A. Bernáth, R. Grappe, Z. Szigeti: *Augmenting edge-connectivity of a hypergraph by adding a multipartite graph.* Proceedings of European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications (Eurocomb 2009), 2009.

[7] A. Bernáth, R. Grappe, Z. Szigeti: *Covering a symmetric crossing supermodular function with partition constraints.* Proceedings of ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA10) 2010.

[8] A. Bernáth, T. Király: *Covering skew-supermodular functions by hypergraphs of minimum total size.* Operations Research Letters, 37(5):345–350, 2009.

[9] A. Bernáth, T. Király, *A new approach to splitting-off*, Proceedings of 13th International Conference IPCO 2008, LNCS 5035, 401–415.

[10] A. Bernáth, Z. Király: *Finding edge-disjoint subgraphs in graphs*, EGRES Quick Proof No. 2010-04, 2010

[11] P. Biró, K. Cechlárová, T. Fleiner,*The dynamics of stable matchings and half-matchings for the stable marriage and roommates problems*, International Journal of Game Theory 36 (2008), 333–352.

[12] Z. Dvorak, S. Jendrol, D. Kral, Gy. Pap: *Matchings and Nonrainbow Colorings*, SIAM Journal on Discrete Mathematics, (2009), 23/1, 344–348, 2009

[13] Zsolt Fekete, *Source location with rigidity and tree packing requirements*, Operations Research Letters, Volume 34, Issue 6, November 2006, Pages 607–612.

[14] Zsolt Fekete and László Szegő, *A Note on $k,l)$-sparse Graphs*, Graph Theory in Paris, Trends in Mathematics, 2007, 169–177.

[15] T. Fleiner, *The stable roommates problem with choice functions*, Algorithmica 58 (2010), 82–101.

[16] T. Fleiner, *On stable matchings and flows*, EGRES Technical Report No. 2009-11.

[17] A. Frank, *Rooted k-connections in digraphs*, Discrete Applied Mathematics, 157 (2009) 1242–1254.

[18] A. Frank; L.C. Lau; J. Szabó: *A note on degree-constrained subgraphs*, EGRES Quick Proof 2006-05, 2006

[19] A. Frank; Z. Király; B. Kotnyek: *An Algorithm for Node-Capacitated Ring Routing*, Operations Research Letters 35 (2007), 38–391.

[20] A. Frank, A.L. Végh: *Kombinatorikus algoritmus pontösszefüggőség eggyel való növelésére*, Matematikai Lapok 13, 57–67, 2007

[21] A. Frank, L. A. Végh: *An Algorithm to Increase the Node-Connectivity of a Digraph by One.* Discrete Mathematics, 2008 (5), pp. 677–684.

[22] S. Fujishige, *A note on disjoint arborescences*, Combinatorica, 30 (2) (2010) 247–252.

[23] D. Gijswijt, Gy. Pap: *An algorithm for weighted fractional matroid matching*, EGRES Technical Report No. 2008-11, 2008

[24] S. Iwata, T. Jordán, *Orientations and detachments of graphs with prescribed degrees and connectivity*, Proc. 5th Hungarian-Japanese symposium on discrete mathematics and its applications, Sendai, April 2007, pp. 149–153.

[25] M. Janata, J. Szabó: *The superstar packing problem*, Combinatorica 29, 27–48, 2009

[26] B. Jackson, T. Jordán, Z. Szabadka, *Globally linked pairs of vertices in equivalent realizations of graphs*, Discrete and Computational Geometry, Vol. 35, 493–512, 2006.

[27] B. Jackson, T. Jordán, *On the rank function of the 3-dimensional rigidity matroid*, International Journal on Computational Geometry and Applications, Vol. 16, Nos. 5-6 (2006) 415–429.

[28] B. Jackson, T. Jordán, *Rigid components in molecular graphs*, Algorithmica, Vol. 48, No. 4 (2007) 399–412.

[29] B. Jackson, T. Jordán, *On the rigidity of molecular graphs*, Combinatorica 28 (6), 645–658, 2008.

[30] B. Jackson, T. Jordán, *Pin-collinear body-and-pin frameworks and the molecular conjecture*, Discrete and Computational Geometry 40: 258–278, 2008.

[31] B. Jackson, T. Jordán, *A sufficient connectivity condition for generic rigidity in the plane*, Discrete Applied Mathematics 157 (2009), 1965–1968.

[32] B. Jackson, T. Jordán, *Rank and independence in the rigidity matroid of molecular graphs*, Egerváry Research Group, Budapest, TR-2006-02.

[33] T. Jordán, A. Recski, Z. Szabadka, *Rigid tensegrity labelings of graphs*, European J. Combinatorics 30 (2009), 1887–1895.

[34] T. Jordán, Z. Szabadka, *Operations preserving the global rigidity of graphs and frameworks in the plane*, Computational Geometry 42 (2009), 511–521.

[35] N. Kamiyama, N. Katoh, and A. Takizawa, *Arc-disjoint in-trees in directed graphs*, Combinatorica 29 (2009), 197–214.

[36] M. Kano, G.Y. Katona, J. Szabó: *Elementary Graphs with Respect to f Parity Factors*, Graphs and Combinatorics 25, 717–726, 2009

[37] T. Király: *Applications of Eulerian splitting-off*, EGRES Technical Report 2007-01, 2007

[38] T. Király, L.C. Lau, M. Singh, *Degree bounded matroids and submodular flows*, Proceedings of 13th International Conference IPCO 2008, LNCS 5035 (2008), 259–272.

[39] T. Király, J. Pap, *Total dual integrality of Rothblum's description of the stable marriage polyhedron*, Mathematics of Operations Research 33 (2008), 283–290.

[40] T. Király, L.C. Lau, *Approximate min-max theorems for Steiner rooted-orientations of graphs and hypergraphs*, Journal of Combinatoral Theory B 98 (2008), 1233–1252.

[41] T. Király, J. Szabó: *Szupermoduláris függvényt fedő adott befok-paritású irányítások*, Matematikai Lapok 13, 40–48, 2007

[42] T. Király, J. Szabó: *A note on parity constrained orientations*, Combinatorica Volume 29, Number 5, 619–628, 2009

[43] Z. Király: *λ-supermodular functions and dual packing theory*, Proc. 5th Hungarian-Japanese Symposium on Discrete Mathematics, 2007

[44] Z. Király, *Better and Simpler Approximation Algorithms for the Stable Marriage Problem*, ESA 2008, Lecture Notes in Computer Science 5193 (2008), pp. 623–634. Algorithmica, available online, DOI: 10.1007/s00453-009-9371-7.

[45] Z. Király, J. Szabó: *Induced graph packing problems*, Graphs and Combinatorics 26, 243–267, 2010

[46] Y. Kobayashi, J. Szabó, K. Takazawa: *A proof to Cunningham's conjecture on restricted subgraphs and jump systems*, EGRES Technical Report No. 2010-04, 2010

[47] R. E. Kovács, L. A. Végh: *The Constructive Characterization of (k, ℓ)-Edge-Connected Digraphs* Combinatorica, *(to appear)*

[48] M. Makai: *On maximum cost $K_{T,T}$-free T-matchings of bipartite graphs*, SIAM J. Discrete Math. 21 No. 2, 349–360, 2007

[49] M. Makai: *Parity problems of combinatorial polymatroids*, PhD dissertation, ELTE Mathematics Doctoral Program, 2009

[50] M. Makai, Gy. Pap, J. Szabó: *Matching Problems in Polymatroids without Double Circuits*, Proceedings of IPCO 2007, LNCS 4513, 167–181., 2007

[51] M. Makai, J. Szabó, TR-2006-08, *The parity problem of polymatroids without double circuits*

[52] Gy. Pap: *Mader matroids are gammoids*, EGRES Quick Proof No. 2006-17, 2006

[53] Gy. Pap: *Some New Results on Node-Capacitated Packing of A-paths*, Proceedings of STOC 2007, June 11-13, San Diego, 2007

[54] Gy. Pap: *Packing non-returning A-paths*, Combinatorica, Volume 27, Issue 2 (2007), 247–251., 2007

[55] Gy. Pap: *Strongly polynomial time solvability of integral and half-integral node-capacitated multiflow problems*, EGRES Technical Report No. 2008-12, 2008

[56] Gy. Pap: *Packing non-returning A-paths algorithmically*, Discrete Mathematics, Volume 308, Issue 8, (April 2008) 1472–1488, 2008

[57] Gy. Pap: *A constructive approach to matching and its generalizations*, Ph.D. thesis, ELTE Mathematics Doctoral School, 2007

[58] Gy. Pap: *Négyzetmentes 2-párosítások páros gráfokban*, Matematikai Lapok 13, 49–56, 2007

[59] Gy. Pap: *A constructive approach to matching and its generalizations*, Ph.D. thesis, ELTE Mathematics Doctoral School, 2007

[60] Gy. Pap: *Weighted Restricted 2-Matching*, Mathematical Programming, Ser. B, (2008), 2008

[61] Gy. Pap, L. Szegő: *Matchings of Cycles and Paths in Directed Graphs*, Combinatorica, Vol 27, Issue 3, 2007, 383–398., 2007

[62] Gy. Pap: *Combinatorial algorithms for matchings, even factors and square-free 2-factors*, Mathematical Programming Ser. B, Volume 110, Issue 1, 57–69, 2007

[63] J. Pap, *Recognizing Conic TDI Systems is Hard*, Mathematical Programming, available online, DOI: 10.1007/s10107-009-0294-5

[64] J. Szabó: *Éldiszjunkt útrendszer kiterjesztése*, Alk. Mat. Lapok 25, 119–129., 2008

[65] J. Szabó: *Packing a graph with leaf-degree constrained trees*, Graphs and Combin. 24, 485–494, 2008

[66] J. Szabó: *Graph packings and the degree prescribed subgraph problem*, Ph.D. thesis, ELTE Mathematics Doctoral School, 2007

[67] J. Szabó: *Good characterizations for some degree constrained subgraphs*, Journal of Combinatorial Theory Ser B 99 (2009) 436–446, 2009

[68] J. Szabó: *Matroid parity and jump systems: a solution to a conjecture of Recski*, SIAM J. of Disc. Math 22, 854–860, 2008

[69] J. Szabó: *Matroid parity and the local augmentation property of jump systems*, EGRES Technical Report No. 2006–09, 2006

[70] L. A. Végh: *Augmenting Undirected Node-Connectivity by One*, Proceedings of the 42nd ACM Symposium on Theory of Computing (STOC) 2010, pp. 563–572.

[71] L. A. Végh, A. A. Benczúr: *Primal-Dual Approach for Directed Vertex-Connectivity Augmentation and Generalizations* ACM Transactions on Algorithms Vol. 4 Issue 2 (2008), Article no. 20.