

## A 49841 azonosító számú "Csoportelmélet" című kutatás eredményeinek részletesebb ismertetése

A kutatás több (rész)területen folyt, és ezeken belül is értelemszerűen számos különböző kérdést érintett. A fontosabb eredmények lehetőség szerint strukturálisan csoportosítva, felsorolásszerűen szerepelnek, a szerzők helyenkénti említése nélkül. A publikációk listájából kitűnik, hogy a több résztvevő kutató és a témák sokasága ellenére az erősen jellemző többszerzős munkák a résztvevők halmazán meglehetősen élgazdag kapcsolati gráfot hoznak létre.

### Végtelen csoportok

#### Aszimptotikus csoportelmélet

A *PIG* (polynomial index growth) tulajdonsággal rendelkező csoportok a korlátosan generált (boundedly generated, *BG*) csoportok általánosításai. Egy csoport korlátosan generált, ha véges sok ciklikus részcsoporthoz a szorzata. Nemrég Muranov konstruált végtelen egyszerű *BG*-csoportokat; ezért a reziduálisan véges esetre koncentrálnunk. Ezekre specializálva a következő eredmények születtek: H. Bass sejtje, hogy ha  $G$  reziduálisan véges *BG*-csoport, ami egyben *FAB* is (vagyis a véges indexű részcsoporthoz Abel-féle faktorai végesek), akkor  $G$  lineáris ( $\mathbf{C}$  felett). Tavgen azt sejtje, hogy ez az *FAB* feltétel nélkül is igaz. Ezt a Tavgen-sejtést sikerült igazolni az alábbi két esetben:

- 1)  $G$  majdnem végtelen, azaz nincs végtelen indexű normálosztója, valamint
- 2)  $G$  reziduálisan véges-feloldható.

Legyen  $H$  egy  $n$ -edfokú permutációcsoport, aminek a minimális foka  $m$ . Éles becsléseket sikerült adni a csoport rendjére, ill. az adott tartójú elemeinek a számára. Ezeknek az eredményeknek alkalmazásával kiderül, hogy bizonyos alapvető kvantum-komputeres algoritmusok nem alkalmazhatók az  $n$ -edfokú szimmetrikus csoportbeli rejtett részcsoporthoz probléma gyors megoldására.

Wall 1961-es sejtése szerint egy  $n$ -elemű csoportnak legfeljebb  $n-1$  darab maximális részcsoporthoz lehet. Ennek a problémának az irányában sikerült megmutatni, hogy a maximális részcsoporthoz száma legfeljebb  $cn^{1.5}$ .

## Topológikus csoportok és gráfok

Az amenábilis csoportok körében sikerült bebizonyítani az L2-Betti számokra vonatkozó Luck-féle erős approximációs sejtést.

Olyan minimális csoportthatást sikerült konstruálni, amelyre nézve létezik két olyan ergodikus mérték, amelyek még orbit-ekvivalencia erejéig sem egyeznek meg.

A cost és az L2-Betti szám a mérhető ekvivalenciarelációk legfontosabb invariánsai. Ezek megfelelőit sikerült megadni véges gráfok sorozataira. A Gaboriau-féle cost egy kombinatorikus analogonjának bevezetése kapcsán vizsgálatok folytak ennek a klasszikus csoportelméleti invariánsokkal való kapcsolatáról.

Von Neumann-féle algebrai technikákat alkalmazva sikerült igazolni véges gráfokra egy globális Cheeger-típusú egyenlőtlenséget.

Lenz és Stollmann bizonyította Delone-gráfokra az „integrated density of states” egyenletes létezését random operátorokra; eredményüket aperiodikus gráfok egy nagyon nagy osztályára sikerült általánosítani, kombinatorikai módszerekkel.

Korlátos fokú nagy gráfok leírásával kapcsolatban bizonyítást nyert, hogy a fákon értelmezett involúció-invariáns mértékek approximálhatók véges gráfokkal.

A sűrű hipergráfok elméletében Rodl és Schach „property testingről” szóló eredményét sikerült kiterjeszteni.

A korlátos fokú gráfok tesztelésével kapcsolatos eredmény, hogy a „matching number” tesztelhető. Ugyancsak sikerült belátni a minimális súlyú feszítő fa alakjának tesztelhetőségét.

## Véges csoportok

### Tiszta csoportelmélet

Általánosítottuk Landau eredményét, amely szerint a legfeljebb  $k$  konjugáltosztállyal rendelkező véges csoportok száma véges: igazoltuk, hogy csak véges sok olyan véges csoport van, amelyben a  $p$ -elemeknek legfeljebb megadott sok konjugáltosztálya van.

Legyen  $G$  véges csoport,  $p$  a  $G$  rendjének egy prímosztója,  $k(G)$  pedig a  $G$  csoport osztályszáma. Megmutattuk, hogy véges sok nem feloldható,  $p$ -feloldható  $G$  csoporttól eltekintve  $k(G) \geq 2\sqrt{p-1}$  teljesül, és itt egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha  $\sqrt{p-1}$  egész,  $G = C_p \rtimes C_{\sqrt{p-1}}$  és

$C_G(C_p) = C_p$ . Ez Héthelyi, Külshammer, valamint Malle es Keller eredményeit terjeszti ki.

MacLane klasszikus tételének általánosításaként véges csoportok szuperfeloldhatósága jellemezhető maximális részcsoporthoz kiegyensúlyozott (balanced) párjaival:  $(A, B)$  egy ilyen pár, ha (mindketten maximális részcsoporthoz, és) metszetük mindkettejükben maximális részcsoporthoz. Egy olyan csoport, amely nem prímszámú rendű ciklikus pontosan akkor szuperfeloldható, ha bármely két nem-konjugált maximális részcsoporthoz kiegyensúlyozott párt alkot, és létezik köztük olyan, amelyben mindkét maximális részcsoporthoz szuperfeloldható.

Szuperfeloldható csoportokat jellemeztünk az általánosított Fitting-részcsoporthoz révén. Általánosítások adódtak a szuperfeloldható csoportok osztályát tartalmazó telített formációkra.

Véges csoportok majdnem-faktorizációjának alkalmazása vezetett olyan particionálható gráfok konstrukciójához, amik az erős perfekt gráf sejtésre adandó ellenpélda keresése kapcsán merültek fel.

Vizsgáltuk azokat a csoportokat, amelyekben bizonyos részalmozok bal és jobb stabilizátora azonos számosságú; prímszámú elemszámú részalmozok esetében ebből következik, hogy a csoport szuperfeloldható. Sikerült jellemezni azokat a 2-csoportokat, amelyek a 2 prímszámra teljesítik ezt a feltételt. A Hamilton-féle csoportokra is született egy jellemzés egyoldali stabilizátorokkal.

Legyen  $G$  egy két elemmel generálható (nem ciklikus) véges csoport. Legyen  $\mu(G)$  a legnagyobb olyan  $m$  természetes szám, amelyre létezik  $G$ -nek olyan  $m$ -elemű  $S$  részalmoza, amelynek bármely két különböző eleme generálja  $G$ -t. Sikerült meghatározni  $\mu(G)$  értékét a következő csoportokra:  $(P)GL(n, q)$ ,  $(P)SL(n, q)$ , ha  $n$  legalább 12. Becslések születtek továbbá  $\mu(G)$  értékére, ha  $G$  sporadikus egyszerű csoport. Utóbbi csoportok esetében sikerült korlátot találni a csoportot unióként előállító valódi részcsoporthoz minimális  $\sigma(G)$  számára is. A  $\sigma(G)$  értékét sikerült viszont pontosan meghatározni akkor, ha  $G$  az  $n$ -edfokú alternáló csoport koszorúszorzata egy ciklikus csoporttal feltéve, hogy  $n=4k+2$  alakú és 12-nél nagyobb.

Vizsgálat folyt a kérdéskör gyűrűelméleti megfelelőjével kapcsolatban is. Scorza 1926-ban igazolta, hogy egy csoport pontosan akkor áll elő három valódi részcsoporthoz egyesítéseként, ha létezik a Klein-csoporttal izomorf faktorcsoporthoz. Ennek az állításnak az analogonját igazoltuk gyűrűkre: leírtuk az összes olyan gyűrűt, amely előáll három valódi részgyűrűjének uniójaként. Emellett meghatároztuk azt a legkisebb  $m$  számot, amelyre  $M_n(q)$  előáll  $m$  valódi részgyűrűjének uniójaként.

Ugyancsak gyűrűkre vonatkozó, némileg hasonló kérdés a következő: legyen  $R$  egy gyűrű. Definiáljuk a  $\Gamma(R)$  gráfot  $R$  elemein úgy, hogy az  $r, s$  elemeket pontosan akkor kötjük össze éllel, ha  $r-s$  invertálható. Leírtuk az összes olyan  $R$  gyűrűt, amelyre  $\Gamma(R)$  Hamilton-féle.

A véges  $G$  csoportra definiálunk egy  $\Gamma(G)$  gráfot  $G$  elemein úgy, hogy két csúcsot pontosan akkor kötünk össze éllel, ha azok együtt generálják a csoportot. (Ezt a gráfot generálási gráfnak

nevezzük.) A  $\Gamma(G)$  gráf klikk-számát és kromatikus számát is vizsgáltuk különböző csoportokra. Azt sejtjük, hogy véges feloldható csoport esetén a generálási gráf klikk-száma és kromatikus száma megegyezik. Ezt a sejtést abban az esetben sikerült belátni, amikor a feloldható csoport Fitting-magassága legfeljebb 2. Ezen kívül véges csoportok direkt szorzatára is vizsgáltuk a generálási gráf klikk-számát.

Azt sejtjük továbbá, hogy  $\Gamma(G)$ -ben akkor és csak akkor van Hamilton-kör, ha  $G$  rendje legalább 4, és  $G/N$  ciklikus  $G$  minden nemtriviális  $N$  normálosztójára. Ezt a sejtést számos csoportosztályra sikerült bizonyítani, így kellően nagy véges egyszerű csoportokra, kellően nagy szimmetrikus csoportokra, feloldható csoportokra, bizonyos koszorúszorzatokra továbbá minden sporadikus egyszerű csoportra.

Sikerült osztályozni az olyan véges, feloldható tranzitív  $G$  permutációcsoportokat, amelyeknek a foka legfeljebb három prímszám szorzata, és  $G$  minden normálosztója tranzitív vagy félig reguláris.

### Csoportok és loop-ok

LCC (left conjugacy closed) loop-ok: Drapal tétele szerint egy LCC loop-nak létezik egy bizonyos módon megadott homomorfizmusa a bal translációk generálta bal szorzáscsoportból a belső permutációk csoportjába. Vizsgáltuk ezen homomorfizmusnak a lehetséges kiterjesztéseit a szorzáscsoportban, és e kiterjesztések egyértelműségét.

Bizonyítást nyert, hogy egy kommutatív belső permutációcsoportú LCC loop nilpotencia osztálya 2. Több szükséges és elégséges feltételt adtunk arra, hogy egy 2 nilpotencia osztályú loop LCC legyen. Jellemeztük a  $p^2$ -rendű nilpotens LCC loop-okat.

Kepka és Niemenmaa tétele szerint a kommutatív belső permutációcsoportú loop-ok centrálisan nilpotensek. A legfeljebb 2-osztályúak esetén a megfordítás is igaz (Bruck, 1946). Példát sikerült adni viszont olyan 3-osztályú centrálisan nilpotens loop-ra, amelynek belső permutációcsoportja kommutatív.

Egy  $G$  csoportot „*l-capable*”-nek nevezünk, ha  $G$  izomorf egy loop belső permutációcsoportjával. Abel-féle *l-capable* csoportokat kerestünk, és bizonyos típusú direkt szorzatokról megmutattuk, hogy ténylegesen olyanok.

Olyan loop-ok keresése, ahol a bal eltolások által generált permutációcsoport normálosztó a bal és jobb eltolások által generált csoportban.

Buchsteiner loopok alapvető tulajdonságait vizsgáltuk, és gyűrűelméleti eszközökkel konstruáltunk olyanokat, amelyek rendje 128, és nem CC (conjugacy closed) tulajdonságúak. Beláttuk, hogy minden 2-osztályú Buchsteiner loop CC.

## Közönséges és moduláris reprezentációelmélet

Legyen  $V$  véges dimenziós  $FG$ -modulus, ahol  $F$  tetszőleges test és  $G$  véges csoport. Tegyük fel, hogy  $V$ -nek nincs triviális  $FG$ -kompozíciófaktora. Ekkor

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \dim C_V(g) \leq \frac{1}{p} \dim V,$$

ahol  $p$  a  $G$  rendjének legkisebb prímosztója. A felső korlát éles. Ez az eredmény P. M. Neumann egy 1966-os sejtését igazolja. Eredményünknek számos következménye van. Többek között Isaacs, Keller, Meierfrankenfeld, Moreto, valamint Segal és Shalev eredményeit általánosítjuk, ill. élesítjük.

A szimmetrikus csoport komplex értékű irreducibilis karaktereiről, egy általános Nakayama-sejtéssel kapcsolatban sikerült Külshammer, Olsson és Robinson egy tételét részben általánosítani, részben bizonyításukat egyszerűsíteni. Az eredményeket az alternáló csoport esetére is sikerült kiterjeszteni.

B. Külshammer és J. Murray korábbi eredményeit fejlesztettük tovább, és általánosítottuk  $p$ -karakterisztikájú, algebrailag zárt testek feletti szimmetrikus algebraikra. A  $p = 2$  esetben a Cartan-mátrix páratlan diagonális elemeinek előfordulását is jellemeztük: pontosan akkor léteznek ilyenek, ha  $G$ -ben van 0 2-defektű valós elem. Ezeket az eredményeket alkalmaztuk a szimmetrikus csoport 2-blokkjaira, valamint normális vagy Abel-féle defektcsoportú blokkokra.

Valós blokkokra és konjugáltosztályokra vonatkozó eredményeket sikerült általánosítani Galois-hatásokra. Példát adtunk meg olyan esetre is, amikor ez a kiterjesztés nem lehetséges.

Negatív választ adtunk Reynolds azon problémájára, hogy a Jacobson radikál Galois-invariáns-e.

Megmutattuk, hogy a Gow–Willems-tétel általánosítása nem teljesül általános Galois-hatásokra.

Bevezettük a „ $\sigma$ -core” fogalmát, és jellemeztük azokat a véges csoportokat, amelyekre a  $\sigma$ -core  $p'$ -csoport.

Vizsgálatok folytak az Oliver-sejtéssel és a Külshammer-sejtéssel kapcsolatban. Az Oliver-sejtés azt kérdezi, hogy egy véges részcsoporthoz egy Thompson-részcsoporthoz benne van-e ugyanezen csoport Oliver-részcsoporthoz. A Külshammer-sejtés azt kérdezi, hogy ha  $\chi$  egy véges  $p$ -csoport irreducibilis karaktere, akkor a  $\chi \times \bar{\chi}$ -ban előforduló különböző irreducibilis karakterek száma kongruens-e 1-gyel modulo  $p-1$ . Analóg sejtés vonatkozik a konjugáltosztályokra is, azaz ha  $K$  egy véges  $p$ -csoportnak konjugáltosztálya, akkor a  $K \times K^{-1}$ -ben előforduló különböző konjugáltosztályok száma kongruens-e 1-gyel modulo  $p-1$ .

Hires, 1956 óta nyitott kérdése a moduláris reprezentációelméletnek a Brauer-féle  $k(B)$ -sejtés: a  $B$  blokkhoz tartozó irreducibilis karakterek száma felülről becsülhető-e a blokk defektcsoportja elemeinek a számával. Ehhez kapcsolódik még Olsson sejtése a 0-magasságú karakterekről és Eaton

sejtése, amely ezek közös általánosítása. Ezen sejtések megfelelőit fogalmztuk meg a blokkbéli valós karakterek számára és bizonyítottuk be a következő speciális esetekben: a főblokkra, a legfeljebb 2000 rendű csoportokra, a sporadikus egyszerű csoportokra valamint azon csoportokra, amelyek valós magja páratlan rendű.

