

# Strukturált nemlineáris programozási feladatok: elmélet, algoritmusok és alkalmazások

OTKA K49789, 2004-2009

Beszámoló (zárójelentés)

Dr. Illés Tibor (témavezető)

**Személyes megjegyzés.** Tekintettel arra, hogy minden évben készítettem szakmai beszámolót és nincsen megadott szempontrendszer, amely alapján értékelnem kellene a saját OTKA pályázatomat, ebben a beszámolóban arra törekszem, a nélkül értékeljem kutatásainkat, hogy megismételném az éves beszámolóknak már részletesebben kifejtett sikereket, eredményeket.

## **Sikerek, eredmények.**

1. Az OTKA pályázatban 4 kutató vett részt: három doktorival (PhD) nem rendelkező tanítványom és én. Egyik célkitűzésünk az volt, hogy Nagy Ádám, Csizmadia Zsolt és Nagy Marianna megvédjék doktori (PhD) fokozatukat. Nagy örömmre és meglepedésemre szolgál, hogy mindhárman *summa cum laude* minősítéssel megvédték doktori disszertációjukat, amelyekben a főeredmények a velem közös és az OTKA által támogatott kutatás során elért és színvonalas nemzetközi folyóiratokban közölt tételek és algoritmusok voltak.
2. Kutatásaink eredményeképpen és az OTKA pályázat támogatásával számos nemzetközi konferenciára jutottunk el, ahol beszámolhattunk eredményeinkről. A következő konferenciákon meghívott szekciókban szerepeltünk:
  - EURO Conference: Reykjavik 2006, Prága 2007 (résztevők: Csizmadia Zs., Nagy M., Illés T.)
  - EURO Mini Conference: Pécs 2005 (résztevők: Csizmadia Zs., Nagy M., Illés T.), Neringa (Litvánia) 2008 (résztevő: Nagy M.)
  - EUROPT Workshop: Reykjavik 2006 (résztevők: Csizmadia Zs., Nagy M., Illés T.)
  - OMS-EUROPT Meeting: Prága 2007 (résztevők: Csizmadia Zs., Nagy M., Illés T.) Ezen a konferencián – nemzetközi visszhangot keltette – plenáris előadást tartottam az OTKA pályázatunk kutatási eredményeiből.
  - SIAM Conference on Optimization: Boston 2008, (résztevők: Nagy M., Illés T. – az én költségeimet nem az OTKA pályázat fedezte)
  - ISMP: Chichago 2009, (résztevő: Nagy M.)
  - International Conference in Memoriam Gyula Farkas, Kolozsvár 2005, (résztevők: Csizmadia Zs., Nagy M., Illés T.)
  - VOCAL Conference: Veszprém 2006, (résztevők: Csizmadia Zs., Nagy M., Illés T.), 2008 (résztevő: Nagy M.)
  - Magyar Operációkutatási Konferencia: Balatonöszöd 2007, (résztevők: Csizmadia Zs., Nagy M., Illés T.), 2009 (résztevő: Nagy M.)

3. Kutatási eredményeink és tudományos közéletben játszott szerepem következtében 2005-2009 között 16 konferencián voltam vagy a program bizottság tagja, vagy a szervező bizottság tagja, vagy pedig meghívott szekciókat szerveztem. Ezek a konferenciák közül több alkalommal (INFORMS: Seattle 2007, Washington 2008; OR50 Conference: York 2008; High Performance Optimization Technique: Tilburg 2008) nem az OTKA pályázatunk fedezte a részvétel költségét, de az elhangzott eredmények nagy többsége az OTKA pályázat témakörében elért eredmények voltak.
4. Elért eredményeinknek köszönhetően, a közelmúltban neves *angliai* (School of Mathematics, Birmingham University, 2005; Judge Business School, Cambridge University, 2009; Department of Mathematics, Brunel University, 2009; Department of Mathematics, Imperial College, 2009; Department of Management, London School of Economics, 2009) és *skóciai* (School of Mathematics, Edinburgh University, 2007; Department of Mathematics, Strathclyde University, 2008; Department of Management Science, Strathclyde University, 2009) kutató egyetemeken tarthattam szemináriumi előadásokat, ahol legfrissebb eredményeinket mutattam be sikerrel.
5. A pályázat 4+1 éve alatt 19 publikáció készült el (10 folyóirat cikk, 1 konferencia kötet cikk, 2 könyvfejezet, 3 disszertáció, 1 kutatási jelentés, 2 kézirat) a következő témakörökben: lineáris programozás belsőpontos és pivot algoritmusai; lineáris komplementaritás elmélete, pivot és belsőpontos algoritmusai; lineáris feltételes, szeparábilis konkáv célfüggvényes minimalizálási feladat optimalitási kritériuma, algoritmusai és alkalmazásai; lineáris programozás alkalmazásai.
6. A kutatásunk eredményei közül ki kell emelnem *6 cikket* (szerzők: Illés T. és Nagy M. illetve az OTKA pályázatban nem résztvevő Terlaky T. és E. de Klerk), amelyekben a *lineáris komplementaritási feladatok (LCP) belsőpontos algoritmussal való megoldhatóságának a kérdését jártuk körbe*. Ezekben a cikkeinkben elsőként sikerült belsőpontos algoritmusra építve ún. EP-tételt bizonyítanunk *általános mátrixú LCP feladatokra*, amely a szokásos alternatíva (illetve dualitás) tételek általánosításainak tekinthetők. Sőt a mi eredményeink, a korábbi Fukudáéktól (1998) és Csizmadiatól és Illéstől (2006) származó eredményeknél abban az értelemben erősebbek, hogy egy EP-megoldást polinomiális idejű algoritmussal tudunk előállítani. Általános LCP feladatot megoldó belsőpontos algoritmust eddig, legjobb tudomásuk szerint, csak Ye és szerzőtársai (2008) és mi tudtunk megfogalmazni és végességét bizonyítani. Ye algoritmusával csak egy speciális feladatot lehet megoldani, az Arrow-Debreu egyensúlyi piac modellből származtatható LCP feladatot. Ezzel szemben a mi módszereink tetszőleges LCP feladat megoldására alkalmazhatók és polinomiális időben előállítunk egy EP-megoldást, amelyik időnként az LCP feladat klasszikus értelemben vett megoldásával is megegyezik. Nem publikált numerikus tesztlejtjeink azt mutatják, hogy időben legalább olyan gyorsan találunk az Arrow-Debreu egyensúlyi piac modellből származtatható LCP feladatra klasszikus megoldást, mint Ye és társszerzői, de a mi algoritmusaink nem egy minimális tartójú megoldást találnak meg. Mivel a feladat megoldásán túl a cél az is, hogy a piac működését minél jobban megmagyarázzuk, ezért igazából maximális tartójú

- megoldást szeretnénk előállítani. Ebben az értelemben a mi megoldásunk majdnem mindig jobbak, mint az a megoldás, amelyet Ye algoritmusával előállít.
7. Kutatásaink másik fő iránya a pivot algoritmusok végességének és lépésszámának a kérdése volt. Erről a témáról 5 cikket írtunk Csizmadia Zsolttal közösen. Három főbb eredményünket emelnénk ki: (i) Lineáris megengedettségi és programozási feladatok pivot (MBU szimplex és szimplex) algoritmusaira adtunk lépés, kiszámolható lépésszám korlátot, a feladat adatainak a függvényében. (ii) LCP feladatokra kidolgoztuk a criss-cross módszer újabb véges variánsait és numerikus tesztjeink, az mutatják, hogy az új variánsok numerikusan stabilabbak. (iii) A ciklizálás ellenes pivot szabályok, egységes általánosítását vezettük be és ezen általános feltételek mellett igazoltuk, hogy közismert pivot algoritmusok végesek a ciklizálás ellenes pivot szabályok mindegyikével. Ezáltal lehetővé vált újabb, véges pivot algoritmusok definiálása is illetve a variánsok numerikus tesztelése.
  8. Nagy Ádámmal közösen, szeparábilis konkáv célfüggvényes, lineáris feltételes minimalizálási feladatra, amelyik az egyik legegyszerűbb globális optimalizálási feladat – hasonlóan az általános mátrixú LCP-hez – optimalitási kritériumot fogalmaztunk meg és egy új a lineáris programozás érzékenység vizsgálatára, illetve a korlátozás és szétválasztás elvére alapuló, új, hatékony algoritmust definiáltunk és igazoltuk végességét.

**Folyamatban lévő kutatások, további tervek.** Figyelembe véve azt, hogy egy-egy kutatási pályázat csak egy időablakot jelent a kutató folyamatos munkájában, így természetes, hogy több olyan kutatás folyik (pl. a bevezetett algoritmusok numerikus tesztelése; alkalmazások) most is, amelyek kezdetei a pályázat idejére datálhatók. Reményeink szerint numerikus eredményeinkről 2-3 további tanulmány készül majd az elkövetkezendő években.

Terveink között szerepel hatékony algoritmusaink párhuzamosítása is mind több processzoros gépekre, mind, pedig számításokra alkalmas GPU-kra.

**Köszönetnyilvánítás.** Ezúton is szeretném kifejezni köszönetemet az OTKA Matematika zsűrijének, amiért kutatásunkat támogatta és lehetővé tette számunkra hazai és külföldi konferenciákon való részvételt.