Beszámoló a *Szimmetria és Csoporthatások az Algebrai Topológiában* OTKA pályázat eredményeiről: 2004-2009

Szenes András

A pályázat a következő lazán összefüggő matematikai problémakörök tanulmányozását vette célba:

1. Thom polinomok, és más topológiai obstrukció osztályok kiszámítása.
2. Modulus terek geometriája és topológiája.
3. Lie csoportok és reprezentációikkal kapcsolatos speciális függvények.

Alább, ezen csoportosításban írjuk le eredményinket.

1. Thom polinomok

A karakterisztikus osztályokat az algebrai topológiában Stieffel és Whitney vezette a múlt század 30-as 40-es éveiben. Már az első definiciók leképezések obstrukciójaként definiálta őket. A legegyszerűbb eset a Hopf tétel, amely kimondja, hogy egy irányított sokaságon egy általános vektor mező annyi helyen tűnik el, amennyi a sokaság Euler karakterisztikája.

Sokaságok közötti leképezések lokális viselkedését a szingularitás-elmélet vizsgálja. Ezt az elméletet is Whitney alapította meg. Mivel a teljes osztályozás egy reménytelen feladat, általában a lokális viselkedések invariánsait tanulmányozzák. Egy ilyen invariáns a szingularitás lokális algebrája. Az egy algebrához tartozó szingularitásokat kontakt szingularitás osztálynak nevezik.

Thom vezette be az 50-es években a szingularitások karakterisztikus osztályait, melyeket most Thom polinomoknak nevezünk. Ezek kiszámítása, többek között, megmondja mikor lehet elkerülni 2 sokaság között egy bizonyos szingularitások megjelenését.

A Thom polinomok számolása egy aktív terület, de a 90-es évekig végéig csak néhány elszórt eredmény született. Ekkor Kazarian munkája, majd Rimányi megszorítási egyenletei segítségével rendszerezettebb lett tudásunk. A pályázatunk valahol ennél a pontnál kezdődött.

Már a 80-as években Joseph, Brylisnki, Vergne, Rossmann munkássága eredményeként a Thom polinomokat sikerült egy általánosabb elméletbe beágyazni. Ha egy G kompakt összefüggő Lie csoport hat egy W complex vektor téren, akkor W invariáns egy zárt algebrai részsokaságához hozzárendelhetünk egy polinomot G Cartan algebráján. Ezt Joseph-polinomnak, ekvivariáns Poincaré duálisnak illetve multifoknak nevezik a szűkebb területtől függően. Ez a polinom megegyezik a Thom polinommal abban az esetben mikor W a leképezés-jetek tere, és az altér egy szingularitás locus. Ezzel az észrevétellel egy sor új obstrukciós problémához tudunk fozzáférni.

L. Fehér, A. Némethi, R. Rimányi: Degeneracy of two and three forms. Egy sokaság globális topológiája kikényszerítheti a rajta élő differenciálformák elfajulásait. Ebben a munkában kiszámoltuk ezen elfajulások Thom polinom elméletét, azon esetekben, mikor a releváns reprezentációnak ($\Lambda^k C^n$) véges sok orbitja van. Emellett explicit kiszámolt példát mutattunk egy konkrét „derivált Thom polinom"-ra és annak geometriai jelentésére.

L. Fehér, A. Némethi, R. Rimányi: Coincident root loci of binary forms. Egyváltozós polinomok egy családjához tekintsük azokat a pontokat a paraméter-térben, ahol a polinom gyökei egy adott partíció szerint egybeesnek. Ennek a "elfajulás-részsokaságnak" a ekvivariáns Poincaré duálisát számoltuk ki. Az egyik fontos használt technika az Atiyah-Bott loklizáció. Alkalmazásként kiszámoltunk egy Geometriai Invariáns Elméleti faktor kohomológia-gyűrűjét.

A. Buch, R. Rimányi: A formula for non-equioriented quiver orbits of type A. A modern Schubert kalkulus egyik alapproblémája a Dynkin gráfokhoz tartozó tegez-reprezentációk orbitjai által reprezentált ekivivariáns osztályok megértése. Egy korábbi cikkben már adtunk algoritmust ezek kiszámolására. Most A. Buch-hal közösen kombinatorikus formulát találtunk az A_n tegez esetén. Módszerünk akármilyen gráf-irányítás esetén működik, nem csak az "ekvi-irányított" esetben, mint más módszerek (Knutson, Miller, Shimozono). Az orbit-lezárások Cohen-Macaluay tulajdonságát kihasználva érdekes következményeket fogalmaztunk meg a polinomok kombinatorikus viselkedéséről.

L. M. Fehér, A. Némethi, R. Rimányi: The degree of the discriminant of irreducible representations. Tekintsük egy reduktív csoport egy irreducibilis reprezentaćióját. A reprezentációnak van egy minimális orbitja, melynek projektív duálisát hívják a reprezentáció diszkriminánsának. A diszkrimináns egyenletének megtalálása reménytelennek tűnik—egy egyszerűbb invariáns a fok. Lokalizációs technikák segítségével sikerült formulát adnunk a diszkrimináns fokára. Ez a formula a csoport gyökeitől és a reprezentáció legnagyobb súlyától függ. Formulánk közös általánosítása Holme, Lascoux, Boole, Tevelev, Gelfand-Kapranov-Zelevinski (hiperdetermináns), DeConcini-Weyman bizonyos formuláinak.

L. M. Fehér, R. Rimányi: On the structure of Thom plinomials of singularities. Holomorf leképezések szingularitásainak Thom polinomja számos komplex enumeratív probléma alapja. Jelentős előrelépést tettünk az ilyen szingularitás Thom polinomok belső struktúrájának megértésében. Bizonyítottunk egy szorzat-formulát: a szorzat szingularitás Thom polinomjából kiszámítható a faktorok Thom polinomja. Szorzatformulánk leglátványosabb alkalmazása a következő tétel. Adott Q végesdimenziós kommutatív komplex algebrához tartozik egy formális hatványsor a d_0, $d_{-1,+1}$, $d_{-2,+2}, \ldots$ változókban, melynek egy explicit helyettesítési értéke megmondja *minden* Q algebrájú szingularitás Thom polinomját. Ezt a hatványsort az algebra Thom sorának neveztük el, és kiszámoltuk néhány kis példán.

L. M. Fehér, B. Kőműves: On second order Thom-Boardman singularties. Zárt formulát adtunk másodrendű Thom-Boardman szingularitások két családjára. A formulákat Schur-polinomok lineáris kombinációjakáent adtuk meg. A bizonyításban kombináljuk a megszorítóegyenletek, a szuperszimmetrikus polinomok és a Gysin leképezések elméletét. Az egyik család végtelen sok példát ad a Thom sorokra.

R. Marangell, R. Rimanyi: The general quadruple point formula. Az 1960-as években Herbert és Ronga meghatározták a leképezések többszörös pontjai által meghatározott kohomológiaosztályok közti univerzális relációkat („többszörös pont formulák")—abban a speciális esetben, mikor a leképezés immerzió. Az 1980-as években Kleiman és munkatársai kiterjesztették e formulákat olyan leképezésekre, melyek enyhe szingularitásokkal bírnak (Morin-leképezések). A Morin eset teljes tárgyalását adja Kazarian egy friss cikke. A fő kérdés az általános formula, mely nemcsak immerziókra, vagy Morin-leképezésekre, hanem általános leképezésekre igaz. Az első nemtriviális eset a 4-szeres pont formula, mi pedig megtaláltuk az általános 4-, 5-, 6-, 7-szeres pont formulákat. Módszerükben összehasonlítják a többszörös pont formulákra az ún. interpoláció-módszer által kapott kényszereket azokkal a kényszerekkel, melyeket az interpoláció módszer az ún. Morin szingularitások Thom polinomjaira ad. Ez utóbbiak ismertek legalább A_6-ig (Bérczi-Szenes).

L. Feher, R. Rimanyi: Thom series of contact singularities. Korábbi Szenes, Bérczi-Szenes és Fehér-Némethi-Rimányi cikkekben tanulmányozták olyan kúpok által meghatározott ekvivariáns osztályokat, melyek fóliázva vannak lineáris alterekkel. Ezt a konstrukciót egy klasszikus Damon-Mather szingularitás-elméleti konstrukcióval összekapcsolva lokalizáció formulákat találtunk kontakt szingularitások Thom soraira, mélyen az eddig ismert szingularitásokon túl. Melléktermékként erős eredményeket találtak a ('punctual') Hilbert sémák természetes sztrátumjainak szingularitásairól.

L. Feher, A. Nemethi, R. Rimanyi: Equivariant classes of matroid realization spaces. Tekintsük azon mátrixok halmazát, melyeknek minorjainak rangja valamilyen előre megadott rang-függvény. Ezen halmaz lezárása a „matroid-realizáció-tér". Matroid-realizáció terek belső geometriáján minden algebrai geometriai komplikáció modellezhető (Mnev tétele). Ezen varietások ideálja tartalmazza az adott matroid triviális egyenleteit, és az adott matroidra teljesülő „extra" geometriai tételeket (pl. az A_3 matroidra a Menelaosz tétel). Ezen egyenletek meghatározása reménytelen feladat. Fehér, Némethi, és Rimányi kiszámolták a matroid-realizáció-terek ekvivariáns osztályait az egyenletek meghatározása nélkül. Definiáltak, és kiszámoltak sok „matroid-Gromov-Witten-invariánst", melyek kiszámolásához a standard quantum-kohomológia módszerek nem elegek.

G. Bérczi, A. Szenes, Thom polynomials of Morin singularities. Ebben a cikkben az $A_d = C[t]/t^{d+1}$ lokális algebrának megfelelő szingularitás Thom polinomjára adunk képletet. Gaffney egy algebrai modelljére építve, a szingularitás locust többszörös fibrálásként reprezentáljuk. Ezután az Atiyah-Bott-Berline-Vergne ekvivariáns lokalizációt alkalmazzuk, mely segítségével egy iterált reziduummá transzformáljuk eredményünket. Formulánk egyetlen ismeretlen paramétere egy Borel-orbit ekvivariáns duálisa, amely kis d esetén könnyen számolható. Egy másik interpretációban konstrukciónk egy nemreduktív hányadoson kiszámolt lokalizációs formula. Esetunkben ez a nemreduktív csoport, a komplex egyenes lokális újraparaméterezéseinek csoportja az origoban.

2. Modulus terek geometriája és topológiája

Ebben a fejezetben hiper-Kahler modulusterek geometriájáról, illetve tórikus sokaságok metszésgyűrűjéről szóló eredményeinket írjuk le.

G. Etesi, The topology of asymptotically locally flat gravitational instantons című dolgozatban sikerült a hiper-Kähler aszimptotikusan lokálisan lapos (ALF) nem-kompakt 4-sokaságok Hausel–Hunsicker–Mazzeo kompaktifikációinak metszetformáit kiszámolnunk L^2-kohomolgiai és Yang–Mills elméleti technikák segítségével. Remélhetőleg ez az eredmény használható lesz e terek osztályozásában.

G. Etesi, M. Jardim, Moduli spaces of self-dual connections over asymptotically locally flat gravitational instantons, dolgozatben ALF

4-sokaságok felett megadtuk azokat a természetes analitikus-topologikus feltételeket, amelyek teljesülése esetén az önduális SU(2) Yang–Mills insztantonok modulusterei szépek, valamint L^2-kohomologiai technikák és egy relatív indextétel alkalmazásával kiszámoltuk e terek dimenzióit.

Végül, egy Szabó Szilárddal közösen írott kéziratban (**G. Etesi, Sz. Szabó, Harmonic functions and instanton moduli spaces over the multi-Taub–NUT space**) a multi-Taub–NUT ALF terek felett a legegyszerűbb insztanton modulustér teljes leírását adtuk meg.

Egy másik irányban, a tükörszimmetria, konkrétabban Batyrev és Materov egy sejtésé által motiváltan, reziduum formulákat találtunk torikus orbifoldok kohomológiai metszésszámaira. Ez az eredmény egy tükörszimmetria tipusú azonosságot ad bizonyos, a torikus varietáshoz kapcsolodó modulus terek sorozata, és a duális tórikus varietés metszésszámai között. A bizonyításaink reziduum technikákat és trópikus kalkulust használnak.
Szenes A; Vergne M: Toric reduction and a conjecture of Batyrev and Materov
Szenes A; Vergne M: Mixed toric residues and tropical degenerations

3. Polilineáris algebra reprezentáció elmélet és speciális függvények

Ebben a fejezetben néhány reprezentáció-elméleti eredményünket írjuk le.

Domokos M., Frenkel P. E., On orthogonal invariants in characteristic 2

Domokos M., Frenkel P. E., Mod 2 indecomposable orthogonal invariants
Ebben a 2 cikkünkben azt mutatjuk meg, hogy az ortogonális csoport standard vektor-reprezentációja több példányának direkt összegén értelmezett invariáns polinomok 2 karakterisztikában teljesen másképp viselkednek, mint minden más esetben. Ennek következtében az egészek gyűrűje felett is nemklasszikus viselkedést tapasztalunk.

Frenkel P. E., Character formulae for classical groups
Ebben a cikkben új formulákat adunk a klasszikus mátrixcsoportok irreducibilis karaktereire; nevezetesen, mátrixhatványok bizonyos elemeinek racionális törtfüggvényeként fejezzük ki őket.

Frenkel P. E., Pfaffians, hafnians, and products of real linear functionals
Itt pozitív szemi-definit mátrixokra bizonyítunk új algebrai egyenlőtlenségeket. Az egyik ilyen egyenlőtlenséget valós lineáris funkcionálok szorzata normájának alsó becslésére alkalmazzuk.

A. Szenes: Periodicity of Y-systems and flat connections. Ez a cikk tartalmazza Zamolodchikov 15 éve nyittot sejtésének bizonyítását. A sejtés egy multidimenziós racionális rekurzió periodicitását mondja ki. Bizonyításunk a rekurziót egy 2-diagonális mátrix-értékű gráf-konnexió laposságaként értelmezi.

G. Felder, R. Rimányi, A. Varchenko: Poincare-Birkhoff-Witt expansions of the canonical elliptic differential form. Itt a kanonikus $U(n_-)$-étékű ellipitikus differenciálformát tanulmányozzuk, amelynek vetülete különböző Kac-Moody algebrákba több okból fontos (hipergeometrikus megoldásokat ad a Knizhnik-Zamolodchikov-egyenletekre, és releváns a Bethe anzatz módszerben is). Expliciten meghatároztuk a projekciók együtthatóit egy kényelmesen választott Poincaré-Birkhoff-Witt bázisban. A formulánk egy alkalmazásaként új sajátfüggvényt találtunk a Calogero-Moser modell Hamilton-operátorjára.