

# Hatékony algoritmusok allokációs feladatokra

Záró beszámoló

## Publikációk

A munkatervben a négy évre összesen 14 **folyóirat-publikációt** vállaltunk. A meghosszabbítással együtt számolt öt évben ehelyett összesen pontosan a dupláját, 28-at jelentettünk meg. Ezeken a munkákon felül 2 összefoglaló, tájékoztató jellegű cikk és 11 konferenciaközlemény született a tudományterületen tipikus kompetitív konferenciákon. További cikkeket adtunk be (több ezek közül megtalálható repozitóriumokban), amelyek jelenleg a bírálati folyamat valamely fázisában vannak.

A projekt öt állandó tagjának tematikát is tárgyaló beszámolóit alább olvashatók. A tagok neve mellett a projektben betöltött szerepüket, a vállalt átlagos éves FTE értéket, illetve az öt év alatt az OTKA projektben közölt publikációik számát is feltüntettük. Ezek alapján látható, hogy a csoporttagok egyéni teljesítménye nagyjából az FTE vállalásuk és szenioritásuk alapján elvárható szerint alakult. Kiemelendő, hogy a 41 publikációból 7 munkán legalább két állandó tag dolgozott együtt, több alkalommal olyanok, akik előtte nem publikáltak közösen.

### Cseh Ágnes (vezető kutató, 0.5 FTE, 21 cikk)

Az OTKA projekt keretében megjelent cikkeim tematikailag 4, körülbelül ugyanannyi cikket tartalmazó csoportba sorolhatók. Az első két csoportban ismert, régebb óta kutatott problémák egyes változatainál elért elméleti eredmények születtek, míg a másik két csoport kevésbé sztenderd problémákat és alkalmazásorientált feladatok megoldásait gyűjti össze.

A klasszikus stabil párosítás problémával és változataival foglalkoztam 5 cikkben. A konkrét problémák között található stabil folyamatok, páronként megadott preferenciák, speciális élek, illetve egy stabilizálási feladat. Egy összefoglaló jellegű cikkem született a terület legígéretesebb aktuális nyitott kérdéseiről is.

A stabilitáshoz közel álló, ám globálisabb optimalitási fogalommal, a népszerűséggel 5 cikkem foglalkozik. Az elsőben a teljes preferencialistákat, a másodikban háromoldalú piacokat, a harmadikban alsó kvótákat, a negyedikben a stabilitásra érvényes strukturális eredmények kiterjesztését, míg az ötödik, egészen friss cikkben a népszerűség egy relaxációját, az úgynevezett  $k$ -stabilitást tárgyaljuk társszerzőimmel közösen.

A harmadik csoportba egyéb allokációs feladatok és igazságossági definíciók sorolhatók, amikkel 5 cikkemben foglalkoztam. Ilyen például a részesedésarányos elosztás keresése a folytonos függvényekkel definiált tortaosztási feladat esetén. Vizsgáltunk Pareto-optimális megoldásokat is előre meghatározott méretű koalíciók esetén, amilyen például egy kollégiumi szobabeosztás. A népszerűség fogalmát párosításokból átvittük permutációkra is, és megvizsgáltuk, hogy a mások által ezekre korábban már definiált népszerűség miben különbözik a párosításokon értelmezettől. A permutációk tekinthetők egy-egy szavazó szavazatának is egy választáson, egy népszerű alternatíva megtalálása így megfelel egy közösségi vélemény kiszámításának. Két cikkem foglalkozik háromdimenziós stabil párosítások constraint programming modelljeivel; ezek olyan modellek, amik segítségével várható értékben rövid számítási idő alatt oldhatók meg NP-nehéz problémák valós inputokon.

A negyedik csoportba sorolt 6 cikkem valós optimalizálási problémák megoldásait tartalmazza. Egy neves nemzetközi fizikaverseny szlovák fordulóihoz számítottunk ki LP modell alapján igazságos megoldásokat (részletek Jankó Zsuzsanna neve alatt). A FIDE sakkversenyek szabályainál átláthatóbb és igazságosabb eredményt kézbesítő játékospárosító rendszert dolgoztunk ki és teszteltünk. Ugyanilyen sakkversenyeken szimulációk segítségével vizsgáltunk a játékosok körében ismert „Swiss Gambit” csalási stratégia sikerességi valószínűségét. Időbankokkal is foglalkoztunk; ezekben a résztvevők szolgáltatásokat, illetve az ezekre szánt időt cserélik el egymás közt akár körben is, monetáris kompenzáció nélkül. Az általunk kidolgozott allokációs algoritmus csalásbiztos. A vesecserék szervezésénél az utóbbi években megnyílt lehetőség, az immunhatáron túli csere matematikai modellezésével is foglalkoztunk, és elméleti eredményeinket valós adatokon végzett szimulációkkal támasztottuk alá. Az ilyen cserék költségesek és orvosi szempontból is kockázatosak, egyes esetekben azonban nem csak az érintett betegnek, hanem az egész betegkörnek is előnyös az alkalmazásuk. Végül egy tisztán robotika cikkből kiindulva analizáltunk olyan allokációs algoritmusokat, amelyeket több robotot igénylő feladatok elvégzésére dolgoztak ki, és javaslatokat tettünk a hatékonyabbá vagy pontosabbá tételükre.

#### [Biró Péter \(szenior kutató, 0.3 FTE, 10 cikk\)](#)

Három cikkben foglalkoztunk bizonytalan preferenciákon alapuló párosítási és allokációs feladatokkal. Először Haris Aziz, Serge Gaspers, Ronald de Haan, Nick Mattei és Bahar Rastegari szerzőtársakkal kétoldali stabil párosítási problémát vizsgáltunk három modellt elemezve: (1) sorsolás modell – minden játékosnak a lineáris preferenciáin van megadva egy valószínűségi eloszlás, (2) kompakt közömbösség – minden játékos gyenge preferenciát ad meg, amelyekből a szigorú preferenciákat egyenlő előfordulási valószínűséggel képezzük, (3) közös valószínűség modell – a preferencia profilokon vesszük adottnak a valószínűségi eloszlásokat. Mindegyik modellre egyrészt vizsgáltuk egy adott párosítás stabilitási valószínűségének kiszámítását, másrészt a legnagyobb valószínűséggel stabil párosítás megtalálásának problémáját. Emellett ezen problémák egyszerűsített verzióit is elemeztük, úgy, mint a biztosan stabil párosítás keresésének problémája. Ezután, Fleiner Tamással kiegészülve, olyan kétoldali párosítási problémákat vizsgálunk, ahol a résztvevőknek páronkénti összehasonlításai ismertek a lehetséges partnerekről, amik nem csak bizonytalanok, de akár intranzitívak is lehetnek. Preferencia-kör esetén előfordulhat, hogy nincs olyan párosítás, amely pozitív valószínűséggel stabil lenne. Beláttuk, hogy a pozitív valószínűségű megoldás létezésének az eldöntése NP-nehéz feladat már akkor is, ha csak az egyik oldalon vannak ciklikus preferenciák. A biztosan stabil megoldásra viszont adtunk egy hatékony algoritmust ebben az esetben, és megmutattuk, hogy abban az esetben viszont NP-nehézzé válik a probléma, ha mindkét oldalon lehetnek ciklikus preferenciák. Végül Haris Aziz, Ronald de Haan és Bahar Rastegari társszerzőkkel hasonló kérdéseket vizsgáltunk allokációs feladatban a stabilitás helyett a Pareto-hatékonytságot tekintve.

Két publikációban foglalkoztunk további allokációs feladatokkal. Haris Aziz, Jerome Lang, Julien Lesca és Jerome Monnot társszerzőkkel arra a kérdésre kerestünk választ, hogy miként lehet egy adott allokációról eldönteni, hogy Pareto-optimalis-e abban a klasszikus esetben, amikor a játékosokhoz tárgy-csomagokat allokálhatunk. Megvizsgáltuk a kardinális és ordinális preferenciák esetét, és NP-nehézségi bizonyítások mellett hatékony algoritmusokat adtunk speciális esetekre. Egy másik cikkben Jens Gudmundssonal közösen egy allokációs problémát vizsgáltunk preferenciákkal, ahol a koordinátor hasznosságát él-súlyokkal reprezentáljuk az elfogadható párokat leíró gráfban. Olyan megoldást keresünk, amely a Pareto-hatékony allokációk között maximális hasznosságú. Karakterizáltuk azokat a feltételeket, amelyek mellett a probléma hatékonyan megoldható számítási szempontból. Az általános esetre egészértékű megoldási módszert

adtunk és ennek gyakorlati használhatóságát demonstráltuk egy valódi óvodai allokációs feladaton és szimulációs adatokon is.

Gyevai Mártonnal 2020 tavaszán egy webes alkalmazást hoztunk létre abból a célból, hogy önkéntes mentorokat allokáljunk diákokhoz, egy hazai egyházi segélyszervezettel és egy online oktatási platformmal közösen koordinálva. Ebben a kapcsolódó tudományos cikkben az optimalizálási feladatot vizsgáljuk, leírjuk a megoldáshoz használt egészértékű modellt, és bemutatunk egy számítógépes szimulációt a valós adatokra építve. Haris Aziz és Anton Baychkov szerzőtársakkal disztribúciós megkötésekkel rendelkező kétoldali piacokon vizsgáltuk gyengén és erősen stabil, illetve ponthatár-alapú stabil megoldások algoritmikus kiszámítását és struktúráját. Az alapmodellt egy ausztrál egyetem nyári projektjének allokációs feladata motiválta, de beláttuk, hogy a ponthatár-alapú stabil megoldások jóval általánosabb modellekre is értelmezhetők, és hatékonyan kiszámíthatók.

Sziklai Balázssal és Csató Lászlóval a versenyek tervezésének azon kérdését vizsgáltuk, hogy milyen páros összehasonlításokat érdemes elvégezni, hogy minél pontosabban közelítsük a versenyzők valós rangsorát. Ehhez többféle versenyformátumot vizsgáltunk Monte-Carlo szimulációkkal, úgy, mint a kieséses, körmérkőzéses, kombinált csoportmérkőzéses, és végül a svájci rendszerű bajnokságokat. Az összes résztvevő rangsorolásának szempontjából a svájci rendszer bizonyult a legjobbnak a hasonló meccszámú alternatív mechanizmusokkal szemben.

### Schlotter Ildikó (senior kutató, 0.3 FTE, 8 cikk)

Az elmúlt 5 évben olyan problémák számítási bonyolultságát kutattam, melyek a preferenciákon alapuló párosításokhoz kötődnek, vagy a társadalmi igazságosság fogalmával kapcsolatosak. A preferenciaalapú piacokon kulcsfontosságú szerepet kapó stabilitás fogalommal több cikkemben is foglalkoztam. Matthias Mnich társszerzőmmel együtt azt vizsgáltuk, hogy a klasszikus Gale-Shapley-féle stabil párosítási modellben hogyan kezelhetőek olyan peremfeltételek a keresett  $M$  párosításra vonatkozóan, melyek adott ágensekre előírják, hogy szerepelniük kell  $M$ -ben. Mivel az ilyen jellegű peremfeltételek gyakran nem férnek össze a stabilitás kritériumával, így a cél egy lehető legstabilabb (azaz a lehető legkevesebb blokkoló párral rendelkező) párosítás megtalálása; eredményeink ezen kérdés részletes paraméteres bonyolultságának meghatározása több paraméter (pl. maximális fokszám, lefedendő ágensek száma, stb.) függvényében. A stabilitás fogalmát kereskedelmi piacokon is vizsgáltuk Fleiner Tamással, Jankó Zsuzsannával és Alexander Teytelboymmal együtt: több lehetséges stabilitási kritériumot elemeztünk, meghatároztuk ezek egymáshoz fűződő viszonyát, valamint a hozzájuk kapcsolódó számítási kérdések nehézségét. Egy harmadik, stabilitáshoz kapcsolódó témát jártunk körül Biró Péterrel és Fleiner Tamással: a Shapley-Scarf-féle cserepiacok magját vizsgáltuk a piaci szereplők szemszögéből. Legfőbb kérdésünk az volt, hogy hogyan változik a piac magja egy ágens szempontjából akkor, ha az ágens által a piacra vitt jószág értéke növekszik: igaz-e, hogy az ágens mindenképpen jobban jár akkor, ha jobb minőségű jószágot szeretne elcserélni? A kérdésre (azaz annak precízen fogalmazott változatára) igenlő választ tudtunk adni, a bizonyítás alapja pedig egy algoritmus, amely a megváltozott piacon talál egy, az adott ágens számára kedvező mag allokációt.

A stabilitás mellett a népszerűség fogalmával is behatóan foglalkoztam. Egy adott probléma több lehetséges megoldás közül azt nevezzük népszerűnek, melynél nincs népszerűbb, azaz olyan, melyet a modellben szereplő ágensek összesítve jobban preferálnak. Telliappalli Kavitha, Király Tamás, Jannik Matuschke és Ulrike Schmidt-Kraepelin társszerzőimmel közösen először a népszerű fenyező problémájára fókuszáltunk, amely a likvid demokrácia témaköréből ered: tekintsünk egy választást megelőző szituációt,

melyben a szereplők delegálhatják szavazataikat, és a cél egy körmentes delegálási hálózat (gráfelméleti fogalommal élve „fenyő”) meghatározása. Cikkünkben többek között polinomiális idejű algoritmust adtunk egy népszerű fenyő meghatározásának problémájára. Ugyanezzel a csapattal folytatva a munkát a következő kérdést elemeztük: adott  $n$  ágens és  $n$  tárgy esetén keresünk egy népszerű teljes párosítást az ágensek és a tárgyak között, feltéve, hogy az ágensek preferenciákkal rendelkeznek a tárgyak felett. Cseh Ágnessel együtt a kétoldalú párosítási piacokat tekintve azt a kérdést vizsgáltunk, hogy lehetséges-e hatékonyan maximális hasznosságú népszerű párosítást találni akkor, ha korlátozzuk a fellépő instabilitás mértékét; ezen kérdésre vonatkozó eredményeinket tartalmazó cikkünk elkészült, jelenleg publikálás alatt van. Részben ezen munka által motiválva vizsgáltam a következő kérdést: eldönthető-e hatékonyan, hogy egy preferenciarendszer (azaz ágensek egy hálózata, melyben minden ágens a szomszédai felett preferenciákkal rendelkezik) milyen távol áll attól, hogy az ágensek preferenciái egyetlen mesterlistából levezethetőek legyenek. Ezen távolság mértékét különféle módokon definiálva meghatároztam a kérdés számítási nehézségét klasszikus és a paraméteres értelemben is.

Kutatásaim harmadik irányvonala az igazságos elosztás témaköre volt. Nemrég online megjelent cikkünkben azt bizonyítottuk be Haris Azizzal és Toby Walsh-sal együtt, hogy már három szereplő esetén is NP-nehéz annak eldöntése, hogy adott tárgyhalmazzal lehetséges-e irigységmentesen elosztani az ágensek között (ordinális preferenciák esetén). Ronald de Haan és Britta Dorn társszerzőimmel pedig azt vizsgáltuk, hogy tudunk-e hatékonyan kiválasztani néhány tárgyat úgy, hogy a maradékot lehetséges legyen arányos módon elosztani három ágens között.

#### Jankó Zsuzsanna (junior kutató, 0.4 FTE, 5 cikk)

Egy kereskedési rendszert leírhatunk egy irányított gráffal, ahol a csúcsok a cégek, és az irányított élek a kereskedések. Minden csúcsnak preferenciái vannak a hozzá tartozó éleken. Azt mondjuk, hogy létezik blokkoló út (vagy „trail”), ha ebben a gráfban egy új úton mindenki szívesebben kereskedne, mint a jelenlegi partnereivel. Ha nincs blokkoló út, akkor a megoldásunk trail-stabil.

Fleiner Tamással és Alexander Teytelboymmal három cikket is írtunk a kereskedési rendszerekről, ebből 2 megjelent, egy még nem. A negyedik szerzőtársunk cikkenként más (Akihisa Tamura, Ravi Jagadeesan, Schlotter Ildikó) Az első cikkben megmutatjuk, trail-stabil megoldás mindig létezik, és kutatjuk, hogy milyen struktúrát alkotnak. Létezik vevő-optimális is eladó-optimális megoldás, ha csak a végső vevők és végső eladók preferenciáit vesszük figyelembe. A második cikkben (Schlotter Ildikóval) azt látjuk be, hogy ha a Hatfield és Kominers által javasolt másik stabilitás definíciót nézzük, ahol bármilyen élhalmaz blokkolhat, nem csak hogy nem mindig létezik stabil megoldás, de NP-nehéz belátni, hogy létezik-e. A harmadik cikk, (Ravi Jagadesaannal) ami az Econometricában jelent meg, a piaci súrlódásokról szól: Megmutatjuk, hogy a piaci súrlódások és folytonosan választható mennyiségek hogyan befolyásolják az egyensúlyi helyzetet kereskedési rendszerekben. A modellünkben a torzító súrlódás lehet tranzakciós költség vagy jutalék. Ha cégek preferenciái teljesítik a „fully substitutable” tulajdonságot, akkor létezik egyensúlyi állapot, és ez egybeesik a trail-stabil megoldással. Azonban (a stabilitás egy másik definícióját tekintve) az egyensúlyi helyzet általában se nem stabil, se nem Pareto-hatékony.

Katarína Cechlárovával és Cseh Ágnessel, valamint Marián Kirešsel, Lukáš Miňóval közösen benyújtottunk egy cikket, "A quest for a fair schedule: The Young Physicists' Tournament" címmel a Journal of Scheduling című folyóirathoz, ebben az IYPT fizikaverseny csapatainak beosztását modellezzük, definiáljuk, hogy mi alapján tekintünk egy beosztást igazságosnak, és mutatunk valós adatokon az eddig használt igazságosabb beosztást.

Joó Attilával egy tortaszeletelő cikket nyújtottunk be, amelyben két új algoritmust mutattunk be egy igazságos felosztás problémájának megoldására, ahol a játékosok követelése irracionális szám is lehet. Ezek a klasszikus „Last diminisher” technikán alapulnak, de egyszerűbbek, mint az ismert módszerek. Ezután megmutattuk, hogy végtelen sok játékos esetén is mindig létezik igazságos felosztás. A cikk ötlete Cseh Ágnes és Fleiner Tamás egy korábbi cikkén alapult, amiben a tortaelosztások számítási bonyolultságát vizsgálják.

### Fleiner Tamás (szénior kutató, 0.4 FTE, 6 cikk)

Az OTKA projekt támogatásával kizárólag olyan publikációim születtek, amelyen más OTKA tagok is szerepelnek társszerzőként, amelyekről ők fentebb már beszámoltak. Ezeken felül futó munkaként megemlíthető még, hogy idén júniusban részt vettem a XXXV. Magyar Operációkutatás Konferencián, es ott Frank Andrással és Király Tamással közös eredményünket adtam elő, "Általánosított stabil párosítások pakolásai és lefogásai" címmel. Az eredmény arról az eddig nem sokat vizsgált kérdéstről szól, hogy egy páros gráfnak legfeljebb hány egymástól diszjunkt stabil párosítása van. A fő eredmény azt igazolja a szokásos stabil párosításoknál általánosabb modellben, hogy a diszjunkt stabil párosítások maximális száma megegyezik a stabil párosításokat lefogó él minimális számával. A bizonyítás kulcsa egy kétfázisú mohó algoritmus, aminek a használatára a stabil párosítások vizsgálatában eddig még nem volt példa.

Garami Bence hallgatónal vizsgáltuk az egyenesen megadott  $3n$  pont stabil hármasokba rendezésének lehetőségét. Sikerült kiterjeszteni az eddig csak kis  $n$ -ekre működő bizonyítást, és immár az eredeti szerzőkétől különböző eszközökkel is be tudjuk látni a stabil hármasítás szükségsszerű létezését. A bizonyítás kulcsa, hogy mindig van lamináris stabil hármasítás, azonban ezt a tulajdonságot nem sikerült  $k > 3$  esetén igazolni.

### Részteveők, hallgatók

A projekt indulásakor csatlakozott 4 szénior és 1 junior kutató a projekt végéig maradt, családi okokból Schlotter Ildikó a későbbi években a kezdetinél magasabb óraszámban, Cseh Ágnes pedig kisebb óraszámban dolgozott. Rajtuk kívül személyenként egy-két évre csatlakoztak még három egyetemről jövő hallgatók, összesen öten. A projekt eredményei közt fontosnak tartjuk felsorolni az ő előrehaladásukat is.

1. Kulcsár Fruzsina Eszter, BME: Cseh Ágnes témavezetése alatt dolgozott, a német vesecseré-program demó verzióját dolgozta ki szakdolgozatában. Ezen fellelkesedve az MSc idejére alkalmazott irányra váltott, és Biró Péter vesecserés OTKA projektjében dolgozott tovább programozóként. Tanulmányai befejeztével az iparban helyezkedett el.
2. Kosztolányi Kata, ELTE-Corvinus: Cseh Ágnes témavezetése alatt dolgozott, egy megírt közös cikk folyóiratnál várakozik bírálatra. Az iparban helyezkedett el.
3. Mályusz Attila, ELTE: Cseh Ágnes témavezetése alatt dolgozott, a fenti cikk második diák társszerzője. Ösztöndíjat nyert a freiburgi egyetem PhD képzésére.
4. Garami Bence, BME: Fleiner Tamás témavezetése alatt dolgozott, több témában ért el kisebb eredményeket, de publikációt érő ezek között egyelőre nem volt. Célja a doktori program megkezdése a BME-n, továbbra is Fleiner Tamás témavezetése mellett.
5. Fleiner Balázs, Corvinus: Cseh Ágnes témavezetése alatt dolgozott egyéni PhD képzésének részeként az OTKA ötödik évében. Sikerült kombinatorikus optimalizálási módszerekkel leegyszerűsíteniük és kiterjeszteniük a Games and Economic Behavior-ben Stable sharing címmel megjelent cikk eredményeit. Munkájukat ez év végéig ugyanehhez a folyóirathoz adják majd be.

## Ismeretterjesztés, hasznosítások

A csoport tagjai számos nemzetközi és hazai tudományos gyűlésen adtak elő, több alkalommal meghívott előadóként. Biró Péter és Fleiner Tamás egy Dagstuhl workshop szervezői is voltak. Született egy angol és egy magyar nyelvű népszerűsítő cikk. Cseh Ágnes a német vesecseré-programról (I. hasznosítások) többször írt vagy nyilatkozott nyilvánosan (ám ezeken az OTKA támogatást nem lehetett feltüntetni). Az általunk kidolgozott LP modellt és a megírt programot egy neves nemzetközi fizikaverseny szlovák fordulójának lebonyolítására több évben használták a verseny szervezői. Figyelemre méltó a szakterületen meglepően kiegyensúlyozott férfi-női arány mind a résztvevők, mind a hallgatók körében.