

Szakmai záróbeszámoló a **Csoporthatások** című, 115799 számú OTKA projektről

A járványhelyzet miatt az eredetileg 48 hónaposra tervezett projekt futamideje többszöri hosszabbítás után 69 hónap lett. Ez idő alatt a kutatócsoport látókörébe az eredetileg kitűzött problémákhoz kapcsolódó további tudományos kérdések is bekerültek, ennél fogva a kutatási tervhez képest újabb témák vizsgálata is csatlakozott a projekt célkitűzéseéhez. Ugyanakkor az utazási korlátozások miatt számos tervezett konferencia megrendezésére nem került sor, a kutatók külföldi utakat nem tehettek. Emiatt a kutatási támogatás jelentős részét nem használtuk fel, és a rovatok között is átcsoportosításra volt szükség, ugyanis több eszköz beszerzésére jelentkezett igény, mivel az online konferenciák és a home office munkavégzés miatt nagyobb teljesítményű, korszerűbb berendezésekkel lehetett a megfelelő megbízhatóságú kapcsolattartást garantálni.

A projekt keretében 50 publikáció készült, néhány közülük még elbírálás alatt áll. A megjelent cikkek közül vezető általános matematikai folyóiratban 4 jelent meg (2 az *Advances in Mathematics*-ben, 2 a *Bulletin of the London Mathematical Society* c. lapban); a szakterület legfontosabb orgánumai közül a *Journal of Algebra*-ban 10, a *Journal of Group Theory*-ban 4 pedig dolgozatot közöltek kutatócsoportunk tagjai.

Témakörök szerint csoportosítva tömören bemutatjuk legfontosabb eredményeinket.

Növekedés csoportokban

Sean Eberhard, Brendan Murphy, László Pyber, Endre Szabó: Growth in linear groups

Igazoltuk Helfgott és Lindenstrauss sejtését, ami a következőt állítja. Legyen A egy véges szimmetrikus részhalma az n -szer n -es invertálható mátrixok csoportjának (tetszőleges test fölött), amiről azt tudjuk, hogy A köbének mérete kisebb, mint A méretének K -szorosa. Ekkor van olyan N , csak n -től függő szám, valamint az A által generált részcsoporthoz olyan L/H szelet, hogy (1) L -nek K^N mellékosztálya lefedi A -t, (2) L/H nilpotens és nilpotencia-osztálya legfeljebb $n-1$, (3) A^N tartalmazza H -t.

Csoportok szorzat-előállításai

Attila Maróti, László Pyber: A generalization of the diameter bound of Liebeck and Shalev for finite simple groups

A neves szerzők korábbi eredményét általánosítva azt bizonyítottuk, hogy ha adott egy G véges csoport néhány konjugálásra zárt részhalma úgy, hogy a méreteik szorzata legalább G elemszámának egy bizonyos hatványa, akkor ezen részhalmozok szorzataként az egész G csoport előáll.

Nick Gill, László Pyber, Endre Szabó: A generalization of a theorem of Rodgers and Saxl for simple groups of bounded rank

Bizonyítottuk, hogy ha egy Lie-típusú véges egyszerű csoportban adott néhány részhalmoz úgy, hogy méreteik szorzata nagyobb, mint a csoport rendjének egy bizonyos – csak a Lie-rangtól függő kitevőjű – hatványa, akkor az adott halmazok alkalmas konjugáltjainak szorzata kiadja az egész csoportot.

Martino Garonzi, Dan Levy, Attila Maróti, Iulian I. Simion: Factorizations of finite groups by conjugate subgroups which are solvable or nilpotent

Véges G csoport esetén korlátokat adtunk arra vonatkozóan, hogy G legfeljebb hány, egymással konjugált, nilpotens, illetve feloldható részcsoporthoz a szorzataként áll elő.

Martino Garonzi, Dan Levy, Attila Maróti, Iulian I. Simion: Primitive permutation groups as products of point stabilizers

Megmutattuk, hogy létezik egy olyan univerzális c konstans, hogy minden n -ed fokú primitív permutációcsoport legfeljebb $c \log n$ pont stabilizátorának a szorzataként áll elő.

Martino Garonzi, Attila Maróti, Alternating groups as products of four conjugacy classes

Beláttuk, hogy minden $1/2$ -nél nagyobb kitevőhöz van olyan N küszöbszám, hogy minden N -nél nagyobb fokú alternáló csoportban bármely négy olyan konjugálásra zárt részhalmazra, amelyek mérete egyenként nagyobb mint a csoport elemszámának adott kitevőjű hatványa, igaz az, hogy a szorzatok az egész alternáló csoportot kiadja.

Dan Levy, Attila Maróti: Set-direct factorizations of groups

Leírtuk mindazokat a csoportokat, amelyek előállíthatók két normális részhalmaz direkt szorzataként.

Cayley-gráfok átmérője

Zoltán Halasi: Diameter of Cayley graphs of $SL(n, p)$ with generating sets containing a transvection

Babai László sokat tanulmányozott sejtése szerint bármely G véges egyszerű csoport tetszőleges összefüggő Cayley-gráfjának átmérője legfeljebb $(\log |G|)^c$, valamilyen c abszolút konstans kitevővel. A sejtést abban az esetben sikerült most bizonyítanunk, amikor $G = \text{PSL}(n, p)$ (p prímszám) és a $\text{Cay}(G, X)$ Cayley-gráfot meghatározó X generátorrendszer tartalmaz legalább egy transzvekiót.

Zoltán Halasi, Attila Maróti, László Pyber, Youming Qiao: An improved diameter bound for finite simple groups of Lie type

A Lie-típusú véges egyszerű csoportok összefüggő Cayley-gráfjainak maximális átmérőjére vonatkozó Biswas–Yang-féle korlátot sikerült megjavítanunk, sőt azt is beláttuk, hogy az új korlát a csoport minden részcsoportjára is érvényes.

Permutációcsoportok és lineáris csoportok bázisának mérete

Hülya Duyan, Zoltán Halasi, Attila Maróti: A proof of Pyber's base size conjecture

Sikerült lezárnunk Pyber László permutációcsoportok bázisszámára vonatkozó 1993-as kérdését, és bebizonyítottuk, hogy ha G egy n -edfokú primitív permutációcsoport, akkor G bázisszáma legfeljebb $c \log |G| / \log n$, ahol c abszolút konstans. Korábbi eredmények a kérdést az affin típusú permutációcsoportok esetére redukálták, ezt az esetet tisztáztuk. A bizonyítás során szükség volt a tranzitív permutációcsoportok szétválasztási számának becslésére is, ami egy önmagában is érdekes eredmény.

Zoltán Halasi, Martin W. Liebeck, Attila Maróti: Base sizes of primitive groups: bounds with explicit constants

Bebizonyítottuk, hogy tetszőleges n -edfokú primitív permutációcsoport bázisának mérete legfeljebb $2 \log |G| / \log n + 24$. Több példa mutatja, hogy a 2-es szorzótényező általában nem csökkenthető.

Hülya Duyan, Zoltán Halasi, Károly Podolski: Random bases for coprime linear groups

Legyen G a V véges vektortér lineáris transzformációinak olyan csoportja, amelynek elemszáma az alaptest karakterisztikájával nem osztható. Abban az esetben, ha $|V|$ elég nagy, megmutattuk, hogy 11 véletlenül választott vektor nagy valószínűséggel G -nek bázisát szolgáltatja. Konkrét alsó becsléseket adtunk erre a valószínűségre (V dimenziójának és az alaptest méretének függvényében) a G struktúrájától függően.

Aszimptotikus csoportelmélet, konjugáltosztályok száma

Barbara Baumeister, Attila Maróti, Hung P. Tong-Viet: Finite groups have more conjugacy classes
A cikk első felében Pyber egy régi, Landau egy eredményéhez, valamint Brauer egy kérdéséhez kapcsolódó eredményét élesítjük. A korlát aszimptotikus. A cikk második felében bizonyos speciális esetekben pontosabb és explicit korlátot állítunk fel.

Attila Maróti, Iulian I. Simion: Bounding the number of classes of a finite group in terms of a prime
Héthelyi és Külshammer korábban bizonyították, hogy ha egy feloldható csoport elemszáma osztható egy p prímszám négyzetével, akkor konjugáltosztályainak száma legalább $(49p+1)/60$. Ebben a cikkben tetszőleges véges csoportra sikerült hasonló becslést igazolni, nevezetesen létezik olyan c pozitív konstans, hogy a konjugáltosztályok száma legalább cp .

Andrea Lucchini, Attila Maróti, Colva M. Roney-Dougal: On the generating graph of a simple group
Egyszerű csoportokról szóló néhány ismert aszimptotikus eredmény felhasználásával megmutattuk, hogy minden kellően nagy véges egyszerű csoport generálási gráfja meghatározza a csoportot.

Csoportok Noether-száma

Pál Hegedűs, Attila Maróti, László Pyber: Finite groups with large Noether number are almost cyclic
Bebizonyítottuk, hogy véges csoportok egy családjában a csoportok Noether indexe akkor és csak akkor korlátos, ha a csoportokban van korlátos indexű karakterisztikus ciklikus részcsoporthoz.

Kálmán Csiszter: On the Noether number of p -groups

Megmutattuk, hogy egy p -hatványrendű csoportnak akkor és csak akkor van olyan felbonthatatlan polinom-invariánsa, amelynek a fokja legalább a csoport rendjének p -edrészze, ha a csoportban van p indexű ciklikus részcsoporthoz, illetve két kivételes eset valamelyike áll fenn.

Kálmán Csiszter, Mátyás Domokos: Lower bound on the Noether number

Egy csoport Noether számának alsó becslésére általában azt használják, hogy ez legalább akkora, mint a részcsoporthoz, illetve a faktorcsoporthoz Noether száma. Megmutattuk, hogy valódi részcsoporthoz, illetve faktorcsoporthoz esetén ez az egyenlőtlenség mindig szigorú.

Kálmán Csiszter, Mátyás Domokos, István Szöllősi: The Noether numbers and the Davenport constants of the groups of order less than 32

Kiszámoltuk az összes legfeljebb 31 elemű csoport Noether számát, valamint kis és nagy Davenport konstansát. Ezek között találtunk egy olyan esetet, amikor a Noether szám nagyobbak bizonyult a nagy Davenport konstansnál, ezzel részleges választ adtunk Geroldinger és Gryniewicz kérdésére.

Permutációcsoportok, permutációs hatások

Robert M. Guralnick, Attila Maróti, László Pyber: Normalizers of primitive permutation groups
Leírtuk az összes olyan n -ed fokú primitív permutációcsoportot, amelynek az indexe az n -ed fokú szimmetrikus csoportbeli normalizátorában legalább n . Számos ehhez hasonló eredmény is született.

Péter P. Pálffy: Subgroups of twisted wreath products

Rámutattunk, hogy a csavart koszorúsorozat bonyolultnak tetsző fogalma természetesen adódik, ha egy egyszerű csoport direkt hatványának tényezőit permutáló csoportra nézve invariáns szubdirekt

szorzatokat tekintjük. Egyszerűsítettünk korábbi bizonyításokat, amelyek a véges hálók részcsoporthálóbeli intervallumként való előállítását visszavezetik a majdnem egyszerű csoportok, illetve a csavart koszorúszorzatok esetére.

F. Fumagalli, M. Garonzi, Attila Maróti: The maximal number of elements pairwise generating the symmetric group of even degree

Meghatároztuk a páros fokú szimmetrikus csoportokban a legnagyobb olyan halmazok méretét, hogy a halmaz bármely két eleme generálja a csoportot. Beláttuk, hogy ez a szám megegyezik a csoport fedési számával, azaz olyan részcsoporthalmazok minimális számával, amelyek uniója az egész csoport.

R. A. Adin, Pál Hegedűs, Y. Roichman: Flip actions and Gelfand pairs for affine Weyl groups

Ebben a dolgozatban a C_n típusú affin Weyl csoportnak különböző hatásainak (triangularizációkon, fákön, szavakon, permutációkon) összehasonlításával foglalkoztunk. David Vogan egy kérdésével kapcsolatban beláttuk, hogy egy természetes involúciótól eltekintve, ezek a permutáció-hatások multiplicitás-mentesek.

p-csoportok

Tugba Aslan, Pál Hegedűs: Maximal deviation of large powers in the Nottingham group

Igazoltuk Keating sejtését arra vonatkozóan, hogy mi a legkisebb sebesség, ahogy a Nottingham-csoport elemeinek távolsága a p -edik hatványra emeléssel csökkenhet.

Fúziós rendszerek

László Héthelyi, Magdolna Szőke, A.E. Zalesski: On p -stability in groups and fusion systems

A véges csoportok elméletében használt p -stabilitás fogalmát általánosítottuk fúziós rendszerekre. Sikeresült Thompson maximális részcsoporthalmaz tételének és Glauberman egy eredményének az analógiát fúziós rendszerekre igazolnunk.

László Héthelyi, Magdolna Szőke: Realisability of p -stable fusion systems

Korábbi munkánkat folytatva megvizsgáltuk a fúziós rendszerek ott definiált p -stabilitásával kapcsolatos realizálhatósági problémát és általánosítottuk Glauberman egy tételét. Bevezettünk egy speciális Glaubermann-típusú funktort és bebizonyítottuk, hogy amennyiben létezik stabil p -funktor, akkor minden p -stabil fúziós rendszer realizálható.

Reprezentációelmélet

Zoltán Halasi, Attila Maróti, Gabriel Navarro, Pham Huu Tiep: Irreducible induction and nilpotent subgroups in finite groups.

Azt bizonyítottuk be, hogy ha egy csoportnak van olyan irreducibilis karaktere, amelyet egy nilpotens részcsoporthalmaz karakteréről lehet indukálni, akkor a csoport általánosított Fitting részcsoporthalmaz nilpotens.

Nguyen Ngoc Hung, Attila Maróti: p -regular conjugacy classes and p -rational irreducible characters

Legyen p a G véges csoport rendjének egy prímosztója. Beláttuk, hogy mind a p -reguláris, mind a p' -reguláris elemek konjugáltosztályainak száma, csakúgy mint a p -racionális, ill. p' -racionális irreducibilis karakterek száma legalább $p-1$ négyzetgyökének kétszerese. Ehhez a Lie-típusú egyszerű csoportok p -reguláris konjugáltosztályainak számára vonatkozó becslést is kellett adnunk, ami a

rangnak és az alaptest elemszámának függvénye.

Trevor Chimpinde, Pál Hegedűs: When every irreducible character is a constituent of a primitive permutation character

Sikerült meghatározni azokat a csoportokat, amelyeknél minden irreducibilis karakter megjelenik, mint valamely primitív permutáció-reprezentáció karakterének összetevője. Ezek pontosan azok a Frobenius-csoportok, amelyeknek a komplementuma prím elemszámú, a magja pedig elemi Abel-csoport, amin a komplementum hatása homogén.

Nguyen Ngoc Hung, Gunter Malle, Attila Maróti: On almost p -rational characters of p' -degree

Legyen a p prímszám osztója a G véges csoport rendjének. Korábban Malle és Maróti adott explicit alsó becslést a csoport p -vel nem osztható fokú irreducibilis karaktereinek számára. Ebben a dolgozatban kiterjesztjük az eredményt a karakterek értékeire is. Azokra a csoportokra, amelyek teljesítik a McKay-Navarro-sejtést (például feloldható csoportokra), elég nagy p prím esetén a korlát p -nek adódik. Azt is megmutattuk, hogy p -feloldható csoportokban (elég nagy prím esetén) a p -Sylow részcsoporthoz ciklikussága felismerhető a karaktertáblázatból.

R. A. Adin, Pál Hegedűs, Y. Roichman: Higher Lie characters and cyclic descent extensions on conjugacy classes

Permutációk, ill. standard Young-sémák ciklikus leszálló kiterjesztését a közelmúltban vezették be a leszálló halmaz klasszikus fogalmának általánosításaként. Ebben a munkában meghatároztuk a szimmetrikus csoport mindazon konjugáltosztályait, amelyekhez létezik ciklikus leszálló kiterjesztés. A bizonyítás a magasabbrendű Lie-karakterek kampó összetevőinek vizsgálatán alapul.

David J. Green, László Héthelyi, Erzsébet Horváth: The Maschke property for the Sylow p -subgroups of the symmetric group S_{p^n}

A prímhatvány fokú szimmetrikus csoport p -Sylow részcsoporthjának relatív prím hatásairól a Maschke tulajdonság egy erősebb formáját igazoltuk. Ennek segítségével többek között meghatároztuk ennek a Sylow részcsoporthoz a legnagyobb kommutatív részcsoporthját. p -csoportok más fontos osztályaira (metaciklikus csoportok, reguláris p -csoportok) is vizsgáltuk a Maschke tulajdonságot.

Thomas Breuer, László Héthelyi, Erzsébet Horváth, Erzsébet, Burkhard Külshammer: The Loewy structure of certain fixed point algebras, Part I

Leírtuk egy F véges test additív csoportjának a multiplikatív csoport egy részcsoporthjának hatása szerinti fixpont-algebrájának Loewy struktúráját.

Thomas Breuer, László Héthelyi, Erzsébet Horváth, Burkhard Külshammer: The Loewy structure of certain fixed point algebras, Part II

Korábbi munkánkban bevezettük véges dimenziós algebráknak egy bizonyos osztályát. Ezek az algebrák mind felhasadók, szimmetrikusak és lokálisak. Ebben a cikkben tovább folytattuk ezen algebrák Loewy-struktúrájának vizsgálatát. Megmutattuk, hogy számos esetben a Loewy-hosszuk eléri a korábbi cikkben bizonyított felső korlátot, de arra is konstruáltunk példákat, amikor szigorú egyenlőtlenség teljesül.

Hayder Janabi, Thomas Breuer, Erzsébet Horváth: Subgroups of arbitrary even ordinary depth
Megoldottunk egy Lars Kadison által felvetett problémát: Példákat adtunk arra, hogy egy részcsoporthat mélysége bármilyen páros egész szám lehet.

László Héthelyi, Erzsébet Horváth, Franciska Petényi: The depth of maximal subgroups of Ree groups
Meghatároztuk az egyszerű $R(q)$ Ree-csoportok maximális részcsoporthatjainak kombinatorikus és közönséges mélységét.

H. A. Janabi, László Héthelyi, Erzsébet Horváth: TI subgroups and depth 3 subgroups in simple Suzuki groups

Meghatároztuk a Suzuki egyszerű csoportokban a TI (trivial intersecton) részcsoporthatokat, illetve általánosabban, azokat a részcsoporthatokat, amelyek diszjunktak valamelyik konjugáltjuktól.

Következésképpen a Suzuki csoportok 2-Sylow-részcsoporthatjairól is érdekes eredményeket kaptunk.

Algebrai geometriai kérdések

Ambrus Pál, Endre Szabó: The fibration method over real function fields

A lokális-globális elv fontos eszköz a számelméletben a diofantikus egyenletek megoldásához. Colliot-Thélène definiálta a lokális-globális elv alkalmazásának egy bizonyos akadályát. Ebben a cikkben megmutattuk, hogy ha egy sima racionális varietás fibrumain csak a Colliot-Thélène-féle obstrukció lép fel, akkor ugyanez igaz a fibráció teljes terére is. A bizonyításhoz a Weierstrass-féle approximációs tétel egy új variánsát dolgoztuk ki.

Dávid Szabó: Special p -groups acting on compact manifolds

Speciális p -csoportoknak és Heisenberg-csoportoknak olyan családjait vizsgáltuk, ahol a maximális kommutatív normálosztó indexe nem korlátos. Beláttuk, hogy létezik olyan – a családtól függő – kompakt sokaság, amelyen a család minden tagja hűen hat diffeomorfizmus-csoportként.

Algebrai kombinatorikai kérdések

Adam Sheffer, Endre Szabó, Joshua Zahl: Point-curve incidences in the complex plane

Adott a komplex síkon m pont, és n algebrai görbe. A cikkben m és n függvényében felső korlátot adtunk az illeszkedések számára. Ez az eredmény Pach és Sharir korábbi, valós síkban érvényes becslését kiterjeszti a komplex síkra.

Gábor Somlai, Mikhail Muzychuk: The Cayley isomorphism property for $(\mathbb{Z}_p)^3 * \mathbb{Z}_q$

Bebizonyítottuk, hogy ha p és q különböző prímek, akkor a $(\mathbb{Z}_p)^3 * \mathbb{Z}_q$ csoport rendelkezik a Cayley izomorfizmus tulajdonsággal (azaz CI-csoport). Ez az egyik első lépés abban az irányban, hogy relatív prím rendű CI-csoportok direkt szorzata is CI-csoport.

Gergely Kiss, Romanos Diogenes Malikiosis, Gábor Somlai, Máté Vizer: On the discrete Fuglede and Pompeiu problems

Egy geometriai feltételt adtunk arra, hogy egy véges Abel-csoport multihalmazára teljesüljön a diszkrét Pompeiu tulajdonság. Ezt a leírást felhasználva sikerült a Fuglede-sejtést minden $p^n q^2$ elemű (ahol p és q különböző prímszámok) ciklikus csoportra igazolnunk.

Csoportalgebrák

Victor Bovdi, Thomas Breuer, Attila Maróti: Finite simple groups with few Galois orbits on conjugacy classes

Meghatároztunk azokat a véges egyszerű csoportokat, amelyeknek az egészek feletti csoportgyűrűjében a centrális egységek csoportja a végtelen ciklikus csoportnak és a kételemű csoportnak a direkt szorzata.

Loopok

Piroska Csörgő: On the existence of nontrivial nucleus and on the nilpotence of Moufang loops of odd order

A loopok elméletében egy régi megoldatlan probléma, hogy létezik-e olyan páratlan elemszámú Moufang loop, amelynek a nukleusza triviális. Ebben a dolgozatban szükséges és elégséges feltételt adtunk arra, hogy egy páratlan elemszámú Moufang loop nukleusza triviális-e, ami elvezethet a probléma megoldásához.

Csörgő Piroska: Every Moufang loop of odd order has nontrivial nucleus

A loop-ok elméletének egy nevezetes megoldatlan problémáját sikerült csoportelméleti módszerekkel megoldanunk. Amint a dolgozat címe is mondja, minden páratlan elemszámú Moufang loop-nak a nukleusza nem csak az egységelemet tartalmazza.

Csörgő Piroska: Characterization of Moufang loops whose commutant is a normal subloop

Jó ideje megoldatlan kérdés volt, hogy egy Moufang-loop kommutánsa mindig normális részloop-e. Bár először Glagola pozitív választ adott, később Grishkov és Zavarnitsine 3-exponensű Moufang-loopoknak két végtelen sorozatát is megadta, amelyekben a kommutáns nem normális. Az eltolások segítségével a loop szorzáscsoportjára vonatkozó szükséges és elégséges feltételeket sikerült megadnunk, amelyek eldöntik, hogy a kommutáns normális részloop-e.

Félcsoportok

Gergely Kiss, Gábor Somlai: Characterization of n -associative, monotone, idempotent functions on an interval which have neutral elements

Itt félcsoportok egy osztályát írtuk le. Ugyanez a leírás létezett asszociatív 2-változós függvényekre, de nekünk sikerült n -asszociatívakra is egy hasonló leírást adni.

Gergely Kiss, Gábor Somlai: Associative idempotent nondecreasing functions are reducible

Egy n -változós asszociatív függvényt akkor nevezünk felbonthatónak, ha előállítható kétváltozós asszociatív függvények kompozíciójaként. Megmutattuk, hogy az idempotens, monoton nem-csökkenő, asszociatív függvények egyértelműen bonthatók fel.