

Zárójelentés az NKFIH 115701 számú projekttel kapcsolatban

Futamidő: 2015.09.01-2021.02.28.

Résztevők: Páczelt István MTA rendes tagja, Mróz Zenon az MTA tiszteletbeli tagja, Szabó Barna az MTA kültagja, Ecsedi István a műszaki tudományok kandidátusa, Baksa Attila PhD, Kiss László Péter PhD, Lengyel Ákos József PhD, Tóth Balázs PhD

Kiss László Péter „Vibrations and stability of heterogeneous curved beam” c. PhD értekezését, <http://midra.uni-miskolc.hu/?docId=22414> , 2016-ban,

Lengyel Ákos József „Static and dynamic analyses of composite beams with interlayer slip” c. PhD értekezését, http://193.6.1.94:9080/JaDoX_Portlets/documents/document_27406_section_24666.pdf, 2017-ben védte meg.

Beleznai Róbert 2017. 09. 01.-től, Mankovits Tamás 2019. 09. 01.-től nem vesznek részt a projektben

A pénzek átcsoportosításával sikerült hasznosan elkölteni a pályázati támogatást, bővítve könyvtárunkat, eszközparkunkat számos konferencián bemutatva kutatási eredményeinket.

Szakmai rész

Annak ellenére, hogy a mechanika több évszázados tudomány, mind a mai napig szakadatlan fejlődésben van. Ipari alkalmazása egyre szélesebb körben vezet megbízható termékekhez előállításához, mivel még a terméktervezés stádiumában a mechanika numerikus módszerei elengedetlen eszközként segítik a tervezőmérnökök munkáját.

Az elmúlt három évtized számítógépi tudomány fejlődése elengedetlen volt a mechanika lehetőségeinek kiteljesedéséhez. Egyre bonyolultabb modellek felépítése, azok nagyszámú paraméteren keresztüli leírása lehetséges. A kapott algebrai egyenletrendszerek, egyenlőtlenégi rendszerek megoldására a mai korszerű számítógépek, viszonylag kedvező áron elérhető megoldásokat szolgáltatnak.

Az szimuláció hibája kétféle forrásból tevődik össze. Egyrészt a modell megalkotása során keletkező hibából, vagy a numerikus megoldás hibájából.

A modell paraméterei (anyagörvény, terhelés, megfogási peremfeltételek) kísérletek általi megerősítést igényelnek. Az alkalmazott numerikus módszerek egyike a *végeselem-módszer*. Ennek hibája az alkalmazott diszkrétizálástól függ, mely eltérés a modell felépítésénél keletkező hibánál jóval kisebb kell, hogy legyen. A kutatásainkban ún. *hp*-verziós végeselem-módszert fogjuk használni. A hiba kontrolljának megbízhatóságára nagyon jó lehetőséget ad a konvergencia mértékének birtoklása [37].

A végelem-módszer 1950-es évek kezdeti szakaszában a megoldás pontosítását, az ismeretlen szám emelését, az elemek számának növelésével érték el. Úgyis mondhatjuk, hogy az elem h méretét csökkentették, ezt a módszert h -verziós számításnak nevezték el. Szabó Barna professzor, az MTA kültagja volt az első javaslattevő arra vonatkozólag, hogy az ismeretlen számot úgy növelte, hogy az elemek méretét nem csökkentette, hanem az elemen belüli polinomokkal közelített elmozdulásmező p polinom fokszámát növelte. Ezzel gyorsabb konvergenciát ért el. Amennyiben néhány helyen az elem méretét is csökkentjük (szingularitási helyek környékén), akkor az ún. hp -verziós számításokhoz jutunk.

A projektünk három nagy fejezetből áll. Egyik érintkezés feladatokkal, a másik rúdként, lemezként, vagy héjként modellezhető szerkezeti elemeket vizsgál, illetve a harmadik téma, az eredeti tervben nem szereplő speciális rugalmasságtani peremérték feladatok analitikus elemzését, pontos megoldások felépítését mutatja be, melyek nagyban támogatják a numerikus számítások validálását

1. Érintkezési feladatok vizsgálata hp -verziójú végelelemes eljárással.

1.1. Általános megoldási kérdések

Az érintkezési feladatok megoldása hp -verziójú elemekkel speciális probléma megoldást követeli meg. Ha a tényleges érintkezési tartomány, amit a megoldás során határozunk meg, nem az elem határára esik, az érintkezési nyomás függvénybeli derivált folytonos lesz, ami a valóságban hibás megoldáshoz vezet. Ezért az elem határát (alakját) meg kell változtatni. Erre először a [Páczelt I., Szabó B., Szabó T., Computers and Mathematics with Applications, 38, (1999), 49-69] munkában került sor.

Egy nagy méretű munkában [68] foglaltuk össze ez irányú legújabb kutatásaink eredményét. Elsősorban súrlódás nélküli érintkezési feladatot vizsgáltunk, rugalmas anyagot feltételezve, lineáris alakváltozások mellett. A potenciális energia minimum eleve mellett a Hellinger-Reissner elvet is alkalmaztuk. Az érintkezési feladatokat büntetőparaméteres és *augmented* (kombinált) technikákkal oldottuk meg. Az elemek határának meghatározásánál a pozicionálási technikát alkalmaztuk, így elértük, hogy az elem teljes terjedelmében érintkezési- vagy rés-altartományban van. A feladatokat a h , p és hp verziós technikával oldottuk meg (hp -nél előre megadott elemszámmal dolgozunk, a tényleges érintkezési tartomány szélénél kicsiny méretű elemeket felvéve). Számos táblázat, diagram jól mutatja a megoldás konvergenciáját. Előzetesen nem várt eredmény, hogy a Hellinger-Reissner elv nem ad pontosabb megoldást, mint a potenciális energiára alapozott eljárás.

1.2 Kopási feladatok vizsgálata

A mérnöki gyakorlatból jól ismerjük, hogy a gépek működésénél számos elem egymáshoz képesti elcsúszásából adódóan az érintkezési felületek mentén a súrlódás hatására hő fejlődik, továbbá anyagrészek válnak le, azaz kopás lép fel. A levált, lekopott anyag miatt a kezdetileg kialakított felületek formája megváltozik, ami a kopás mértékétől függően a testek feszültségi állapotának lényeges változásához is vezethet. A várható alak meghatározása fontos a gépet üzemeltető számára, a tervezőnek pedig lehetőséget ad a várható élettartam becslésére. A kopás folyamatának numerikus szimulációja, hagyományos úton, a kopási törvény időintegrálásával, komoly számítógépi erőforrást követelő folyamat.

Vizsgálatainkban az érintkezési felület normálisának irányába eső, lekopott réteg változásának sebességét modifikált Archard-féle törvénnyel írjuk le. A sebesség függ az érintkezési nyomástól, a testek közötti

relatív sebességtől, az anyagot jellemző kopási paraméterektől. Általános esetben a kopást kopási vektorral jellemezhetjük. A kopási vektort az érintkező testek közötti relatív merevtestszerű mozgás határozza meg [Páczelt I., Mróz Z., Tribology International 42 (2009) 275-283].

Gyakorlatból jól ismert a bejáratás fogalma. Bizonyos idő után az egymás felett elcsúszó alkatrészek kopásának jellege nem változik meg, kialakul egy stationer helyzet. Pl. ha egy téglatestet állandó terhelés és sebesség mellett mozgatunk egy végtelenek tekinthető alaplapon (asztalon), akkor elérkezünk egy olyan állapothoz, hogy a nyomás már nem fog változni, azaz állandósult kopási állapot következik be. Ezt az állapotot az Archard-féle törvény időintegrálásával kaphatjuk meg. Ez igen nagy számítási időt követel meg. Felmerült a kérdés, meg lehet-e határozni az állandósult állapothoz tartozó nyomást valami energetikai elvből az időintegrálást kihagyva. A válasz igen volt, a kopási disszipációs energia minimuma jelöli ki ezt az állapotot (lásd a fenti cikket).

A jelen kutatásainkban az alábbi eseteket vizsgáljuk:

1. a terhelés állandó, a relatív mozgás periodikus,
2. a relatív sebesség állandó, a terhelés periodikusan változó összetevővel is rendelkezik,
3. a terhelés és a mozgás periodicitással rendelkezik (fékezés esete).

Az 1. esetben a jobbra és balra történő mozgásnál különböző nyomás megoszlás alakul ki, de állandósult állapothoz tartozóan a kétfajta nyomás összegére vonatkozólag levezethető egy összefüggés az egy periódusra felírt disszipációs munkából. Kezdeti alakot a balra és jobbra mozgó állandó terhelésű és sebességű testekből, mint átlagot véve kétfajta optimalizációs technikával jutottunk el a periodikus mozgásnál kialakuló állandósult állapotot jellemző alakhoz [2, 10, 11]. A 2. és a 3. esettel a [12] munkák foglalkoznak.

Külön problémaként jelentkeznek az olyan szerkezetek, amikor az egyik test szakaszonként más és más kopási tulajdonságokkal rendelkezik. A [71] munka ezt az esetet taglalja periodikusan változó mozgásnál és terhelésnél. Ezekben az esetekben is levezethetők az összegzett nyomási összefüggések, amelyek szakaszonként lineáris függvények. A kopási feladatok hőfejlődés mellett is megoldást nyertek.

Dobfékek vizsgálatával foglalkozik a [69] munka. Felhasználjuk a dobfékre levezetett nyomási összefüggéseket az óramutató járásával egyező irányú ill. a vele ellentétes irányú forgásnál. A fékező nyomatókat meghatározva optimalizálni lehet a pófákat kitámasztó csapok helyét. A fék külső hengerének elmozdulását a nyomás birtokában számolni tudjuk az *Abaqus* rendszert felhasználva. A pófák merevtestszerű elfordulását felvéve ki lehet számolni a pófák kopásának mértékét, amivel az állandósult kopási állapot megbecsülhető. Olajfúró csöveknél használatos megfogófej szorító pófájának optimális kialakításával foglalkozik az [53] munka.

Az [51]-es publikációban ismertetett munkában kísérleti és numerikus számítási módszerekből álló eljárást dolgoztunk ki az elektromos autókban használt hűtőventilátorok elektromos csatlakozóinak *fretting* korróziós hibájának elemzésére. A rövid ciklusú kifáradás-alakváltozás diagramhoz hasonló élettartam-görbéket elektromos ellenállás-mérésekkel határoztunk meg a *fretting* vizsgálatok során. Ezeket a diagramokat az amplitúdó-ciklus összefüggéseket rögzített paraméterek esetén határozzuk meg. Numerikusan kapcsolt végeelem-modell épült fel, amely lehetővé tette számunkra a szerkezeti, kopási, elektromos és hőtani elemzés elvégzését a mért átmeneti elektromos ellenállás növekedésének ismeretében. A kapcsolt modellt a kopás folyamata során keletkező kráter méretének mérésével

validáltuk, és meghatároztuk az adott esetre jellemző kopási sebességet. A *fretting* problémák egyéb vonatkozásai [57] cikkben találhatóak.

Izgalmas kérdés a felületi mikrogeometria hatása a kialakuló kopási viszonyokra. Kapcsolt súrlódási és kopási állapotok kerültek megvizsgálásra anizotrop felületi érdesség esetén. Hosszirányú érdességnél a csúszás hatására kialakul egy állandósult kopási állapot állandósult súrlódási tényezőnél. A keresztirányú csúszásnál is kialakul egy stacioner állapot. A kifejlesztett numerikus modell összehasonlítást nyert a kísérleti eredményekkel jó egyezést mutatva [35]. A numerikus kísérletekre a varsói IPPT akadémiai intézetben került sor.

1.3 Érintkezési optimalizációs feladatok

Gépalkatrészek érintkezésénél gyakran találkozunk olyan esetekkel, amikor a testek szélén nagy feszültségek keletkeznek, feszültségi szingularitások alakulnak ki. Ezek az élettartamot nagymértékben csökkentik. Tehát elkerülendő. A szingularitás elkerülésére a nyomás lefutásán kell változtatni, azaz vezérelni kell. A nyomásvezérlés technikáját alkalmazzuk a [11] cikkben tengely-szimmetrikus és síkbeli szerkezeteknél (14db), kopási feladatokat is érintve. A [25] munkánkban az érintkezési nyomás optimalizálásának általános kérdéseit elemeztük.

Gumialkatrészek tárgyalása megköveteli a nemlineáris elmélet alkalmazását, hisz az anyag viselkedését leíró anyagtörvény nemlineárisan függ az alakváltozás mértékétől, továbbá a terhelés hatására bekövetkező elmozdulások és alakváltozások is nagymértékűek. Fontos feladat az anyagi viselkedést leíró anyagegyenlet kiválasztása a benne szereplő állandók meghatározása kísérletek segítségével. Általában az anyag izotropnak összenyomhatatlannak tekinthető. Hiperelasztikus modellek jól leírják a gumialkatrész nemlineáris viselkedését. [1, 7] munkában tengely-szimmetrikus alkatrész alakjának meghatározása történik, a számított és mért elmozdulás erő diagram különbségének minimalizálása révén. Az optimalizálás során az un. SVR módszer került felhasználásra. [31]-ben Money-Rivlin és Yeoh modell került felhasználásra. ANSYS programrendszer felhasználásával a mért és számított eredmények összevetése alapján az anyagállandó törvényben szereplő állandók pontosításra kerültek. A három tagot tartalmazó Yeoh-modell pontosabb megoldást ad, mint az egytagos modell, de a kéttagos Money-Rivlin modell pontosabb a Yeoh-modellnél, így ennek alkalmazása a javasolt.

Egy új típusú optimalizációs feladat került megfogalmazásra [52, 53]. Alkatrészek szerelésénél, pl. csap behelyezése túlfedéssel egy furatba, azt kívánja, hogy adott mélységben kell beletenni a csapot adott erőt kifejtve. Tehát a mechanikai szerkezet egyazon pontjában az elmozdulás és az erő is előírt. A szerelő kart tartónak feltételezve keressük a tartóra ható bélyeg (terhelés szétosztó) alakjának kialakítását megcélözva a szerelési elmozdulásra kirótt korlát betartását. Hatásfüggvények felhasználása elősegíti a megoldást Signorini-kontakt feltételek kielégítése mellett. Két cikk jelent meg e témában [54, 70]. Vizsgáltuk azt az esetet, amikor a két erő hat a tartóra, biztosítva egy adott keresztmetszetben az elmozdulás a szögelfordulás maximális értékét, a két erőt jobbra-balra mozgatva. Ezzel kapcsolatban egy videó tekinthető meg a következő címen:

<https://youtu.be/y5E3NonVmY8> illetve <https://youtu.be/6R7VSvPJ-Rk>.

Jelenleg is folynak további kutatások e területen Mróz Zenon professzorral, az MTA tiszteletbeli tagjával.

1.4 Vegyes kenési viszonyok vizsgálata

Bár a termoelasto-hidrodinamikai (TEHD) problémák megoldására már számos módszert kidolgoztak, a rendkívül nemlineáris probléma megoldása továbbra is meglehetősen kihívást jelent [13, 14]. Ezért a film alakjának, a nyomás- és hőmérséklet-eloszlás kiszámításához szükséges p -verziójú VEM-modell kidolgozása és annak kereskedelmi szoftverekbe történő bevezetése időszerűnek tűnik a csúszó gördülő felületpárok működés közbeni tanulmányozásához. Mivel az általános 3D áramlási probléma kvázi kétdimenziós esetre redukálható a Reynolds által kidolgozott hidrodinamikai kenési elmélet alapján, speciális kenőanyag film elem kifejleszthető az ilyen problémák végeeselemes-modellezésére.

A kenés háromdimenziós érintkezési problémájához kétdimenziós kenőfolyadék film végeeselemes elemtípust fejlesztettünk ki [38]. Ennek az elemnek a figyelemre méltó tulajdonsága, hogy csak kétdimenziós hálót kell létrehozni. Ezenkívül a nyomás és a filmvastagság független elemváltozóként kezelhető. A vastagságon keresztüli integrációt dimenzió nélküli vastagsági koordináta felhasználásával hajtjuk végre. A folyadékfilm hőmérsékletének háromdimenziós viselkedése a vastagság irányának magasabb rendű közelítéseivel modellezhető. A módszer alkalmasságát vonalérintkezésre igazoltuk, és az EHD részt egy kereskedelmi végeeselem-szoftverbe implementáltuk.

2. Rúdak, lemezek, héjak speciális problémái

2.1 Hierarchikus rúdmodellek

A végeeselem-módszer lehetővé teszi, hogy a közelítő elmozdulásmezőt koordinátánként különböző fokú polinomokkal közelíthessük. Ezt a technikát rudak esetén könnyű alkalmazni. A kutatásunk egyik vonulata ezzel kapcsolatos.

Munkáinkban prizmatikus, síkgörbe rudakat és térbeli spirál középvonalú rudakat vizsgálunk feltételezve, hogy a rúd anyaga homogén, izotrop, lineárisan rugalmas, a terhelés kvázistatikus, az elmozdulások és alakváltozások kicsinyek, azaz a lineáris rugalmasságtan keretei között vizsgáljuk a peremérték feladatot.

A vizsgálatra a potenciális energia minimum elvre alapozott végeeselemes közelítést választjuk, az elmozdulásmezőket az ún. mezőfüggvények (*field functions*) és irányfüggvények (*director functions*) szorzatainak összegén keresztül közelítjük [55]. Az irányfüggvények a Pascal háromszöghöz tartozó polinomok szerint változnak a keresztmetszetben, a mezőfüggvények (a test hossz tengelye mentén) p -verziójú végeeselem-módszerrel nyernek közelítést [36]. A vizsgálatokat görbevonalú koordináta-rendszerben végezzük el. A keresztmetszet síkjában a keresztmetszet súlypontján áthaladó egymásra merőleges tengelyekre merőleges lesz a középvonal érintője. Ezen tengelyek által kijelölt lokális koordináta-rendszerben értelmezett elmozdulásokat és szögelfordulásokat a szokásos úton transzformáljuk a globális Descartes koordináta-rendszerbe. A középvonalhoz kapcsolt kísérő triédert a Serret-Frenet képletekkel állítjuk elő. Az irányfüggvények polinomjainak fokszámától függően különböző hierarchikus modellekhez jutunk, a kapott eredményeket a háromdimenziós modellel a *StressCheck* végeeselem-programmal vetjük össze. Rögzített irányfüggvényeknél a mezőfüggvényeknél felvett polinomok fokszámától függően vizsgálhatjuk a numerikus közelítés konvergenciáját, míg a hierarchikus modellek egymásutánosságától kapott eredmények szolgáltatnak további információt a tényleges háromdimenziós állapot megközelítésére. A kidolgozott modellt érintkezési feladatok megoldására is használtuk, elemeztük a Winkler-típusú ágyazás hatását egyoldalú kapcsolat esetén [56, 72]. A felépített modellek konvergencia diagramjai jó képet adnak a megoldás háromdimenziós eredményhez képesti

pontosságára. A hierarchikus modellek előnye alacsony számú ismeretlennel a mérnöki gyakorlat igényeit jól kielégítik alacsony számítógépi erőforrás felhasználásával. A kidolgozott számítógép programban hét fajta hierarchikus szint érhető el.

Egy másik lehetőség is van a modell felépítésére. Ekkor az elmozdulásmezőt az izoparametrikus elemeknél használatos helyi-globális koordináta-rendszerek közötti elem leképezésével közelítjük, az irányfüggvényekre a fenti polinomokat, illetve a Legendre polinomokat használjuk. Ez irányú kutatások mind a mai napig folytatódnak.

2.2 Heterogén anyagú síkgörbe rudak egyes feladatai

Heterogén anyagú körívalakú, síkgörbe rudak *rezgéstani* vizsgálataihoz kötődően sor került egy új modell kidolgozására és kiértékelésére. Az új modellben feltevés szerint a rúd középvonala végig a saját síkjában marad, illetve érvényes az Euler-Bernoulli hipotézis. Előny, hogy nem csak többrétegű, hanem funkcionálisan gradiens anyagból készült elemekre is alkalmazható, amennyiben az anyag izotrop és lineárisan rugalmas. A koronapontban működő koncentrált, függőleges irányú (húzó-, vagy nyomó-) erő hatása az általa okozott fajlagos nyúláson keresztül jelenik meg. Sor került egy alkalmas numerikus algoritmus kidolgozására. A vizsgálatok többféle megtámasztásra irányultak. Bármilyen megtámasztás esetén a görbe rúd páros (második, negyedik) sajátfrekvenciájának és egy ugyanolyan hosszúságú és anyagú egyenes rúd első sajátfrekvenciájának hányadosa független a keresztmetszeti geometriától, anyageloszlástól. Az állítás igaz a páratlan sorszámú sajátfrekvenciákra is, amennyiben a nyílásszög elég nagy. Frekvenciaváltás jelenségével is szembesültünk, ugyanis a kezdetben első/harmadik sajátfrekvencia nagyságát tekintve a második/negyedik lesz, ahogy a rúd nyílásszöge nő. A megtámasztásnak mindemellett komoly szerepe van a frekvenciaspektrumra. Ami az előterhelt rudak frekvenciáit illeti, nyomóerő hatására a frekvenciák csökkennek, húzóerő hatására megnőnek. Az anyagi összetétel (inhomogenitás) hatását is vizsgáltuk a görbe rudak sajátfrekvenciáira. A munka funkcionálisan gradiens anyageloszlást vizsgált (alumínium és alumínium oxid összetevőkből). Számos hatványkitevő, nyílásszög és keresztmetszet képezte a cikk tárgyát. Megállapítható, hogy az anyagi eloszlás megváltoztatásával jelentős mértékben megváltoztathatók a sajátfrekvenciák (elhangelhető a szerkezet) [15, 22, 23, 26, 32].

Lapos, heterogén görbe rudak *nemlineáris stabilitásvizsgálatával* kapcsolatban sor került egy új mechanikai modell megalkotására. Ez szintén az Euler-Bernoulli hipotézisen alapszik, infinitezimális nyúlások és nagy forgások feltételezése mellett. Bizonyos kinematikai feltevések miatt a modell nem csak (szigorúan véve) lapos rudakra alkalmazható. A modell figyelembe veszi a hajlító igénybevétel hatására történő középvonali hosszváltozást. A terhelés koncentrált sugárirányú/függőleges erő a koronapontban/tetszőleges pontban. A legfontosabb eredmények: számos rúdnál több stabil és instabil egyensúlyi helyzet létezik, a teher helyének nagy hatása van a viselkedésre, a csuklós rudak érzékenyek kis terhelési imperfekciókra. A támasz elmozdulásának és forgásának hatását is vizsgáltuk [39, 49, 50, 66, 67, 77]. A további vizsgálatok hárompontos peremérték feladatokkal kapcsolatos Green-függvényekkel foglalkoztak. A Green-függvények alkalmazásával homogén és/vagy keresztmetszeti heterogenitású rudakkal kapcsolatos egyes hárompontos sajátérték feladatok Fredholm integrál egyenletekre vonatkozó sajátérték feladatokra vezethetők vissza. Az ezek megoldására kifejlesztett numerikus algoritmus ismertetésére és példák bemutatására is sor került [58].

A [76] cikkben prizmatikus görberúd elmozdulás és feszültség meghatározását végeztük el, melyben a rúd középvonala kör alakú és a rúd vastagsága a szög függvényében változhat. Euler-Bernoulli-féle rúdelmélet került alkalmazásra. A kidolgozott feladatok analitikus megoldásokat adnak későbbi numerikus számítások validálására.

2.3 Nem tökéletesen kapcsolódó rétegzett kompozit rudak vizsgálata

Réteges szerkezetű kompozit rudak viselkedését ugyan már régóta vizsgálják, manapság is számos kutató foglalkozik ezen rudak mechanikai működésével, modellezésével. A rétegek egymáshoz történő rögzítése általában olyan kötőelemekkel történik, melyek terhelés hatására rugalmas deformációt szenvednek, emiatt a rétegek közötti kapcsolat nem tökéletes, a rétegek egymáson kis mértékben elcsúszhatnak. Az iparban manapság egyre gyakrabban alkalmaznak ilyen tulajdonságú rudakat, ezért fontos a viselkedésük minél pontosabb leírása analitikus és numerikus modellekkel.

Két rétegből felépített rúdszerkezetet vizsgálatát végeztük el analitikus módszerek alkalmazásával, melyek között a csúszási viselkedést modelleztünk [3]. Timoshenko-féle rúdmodellt használtunk mind a két réteg vonatkozásában biztosítva az egyforma keresztmetszeti szögelfordulást.

Új analitikus módszer került kifejlesztésre a [9] tanulmányban egyenes középvonalú, réteges szerkezetű kompozit rudakra, melyek rétegei nem tökéletesen kapcsolódnak egymáshoz, kismértékű csúszás léphet fel közöttük. A módszer a Timoshenko-féle rúdelméleten alapul azzal a megkötéssel, hogy a két réteg szögelfordulása azonos.

Hőterhelésnek kitett, nem tökéletesen kapcsolódó kompozit rudakra is felírtunk egy új analitikus módszert az [5] munkában. Itt az Euler-Bernoulli rúdmodellt alkalmaztuk, és meghatározásra kerültek a rudakban kialakuló feszültségek is. A kiegészítő energia elvből származó formulákat is levezettünk szintén nem tökéletesen kapcsolódó, görbe középvonalú kompozit, illetve piezoelektromos rudakra [8, 24] Euler-Bernoulli rúdmodellt feltételezve.

A [29] cikkben gyenge nyírási kapcsolattal rendelkező, réteges szerkezetű kompozit rudakra alkalmazzuk a potenciális energia minimuma elvét, valamint a kiegészítő energia minimuma elvét. Egy egzakt másodrendű megoldási módszert írtunk fel kétrétegű, gyenge nyírási kapcsolattal rendelkező kompozit rudakra, melyeket transzverzális és axiális erők is terhelnek [33]. Kompozit rudakkal foglalkoztunk a [34]-ben is.

Az I. Ecsedi, Á. J. Lengyel: An analytical solution for static problems of curved composite beams, *Curved and Layered Structures*, Vol. 6, pp. 105-116, 2019 tanulmányban egy analitikus megoldási módszer került bemutatásra kompozit síkgörbe rudak deformációjának a meghatározására. Az elmozdulásmező feltett alakja olyan, hogy kielégíti az Euler-Bernoulli rúdelmélet követelményeit.

A [44] cikkben egy analitikus megoldási módszer kerül bemutatásra forgó, két rétegű kompozit síkgörbe rudak deformációjának a meghatározására. A görbe rúd síkbeli deformációja az állandó szögsebességű forgómozgásból származik.

A [64] cikkben egy körkörös rugalmas inhomogenitással rendelkező hengert vizsgálunk, melynek külső palástfelülete tengelyirányú terhelésnek van kitéve. A teljes test két részből áll, egy belső tömör hengerből, és egy külső üreges hengerből, mely üregbe tökéletesen illeszkedik a belső test.

2.4. Többmezős variációs elvek alkalmazása rugalmasságtani feladatokra

A kutatás első lépéseként sikerült levezetni három, nem-szimmetrikus feszültségmezőn alapuló, többmezős duál variációs elvet elasztodinamikai feladatokra. Közülük az első egy négymezős elv, melynek független alapváltozója az elmozdulás-, az impulzus-, a feszültség- és az infinitezimális forgásmező. Bemutatásra került azt is, hogy kell megfelelően kezelni a hat különböző kezdetifeltétel-típust mind erős, mind gyenge formában. A második variációs elv egy ötmezős elv, mely az impulzus- és a sebességvektort független változóként kezeli. A harmadik energia elv hárommezős, mely a kiegészítő kinetikus és alakváltozási energián alapul. Az utóbbi egy lehetséges alkalmazására került héjfeladatokra. Ennek eredményeként egy új, *hp*-verziós, forgásszimmetrikus héjvégelem-modellt fejlesztettünk ki elasztostatikai feladatok megoldására. A kód NURBS interpolációt használ a középfelület meridiángörbéjének leírására [16, 73]. Mind az elmozdulás-, mind a feszültség-koordinátákra kiváló konvergencia-eredményeket kaptunk nemcsak *h*-, hanem *p*-típusú approximáció esetén is. Itt érdemes megjegyezni azt, hogy a dimenzió-redukciós folyamat során nem kellett használnunk a klasszikus elméletekből jól ismert alapfeltételezéseket, mert a variációs elv egyáltalán nem diktálta azok beépítésének szükségességét, ezért módosíthatlan, inverz háromdimenziós anyagegyenleteket alkalmazhattunk [16, 73]. Később az eredeti variációs elv szisztematikus hibridizálásával sikerült gyorsítani is az algoritmust, hiszen a hajlékonysági mátrix invertálását ebben az esetben már elemenként (blokkonként) is el lehetett végezni [59]. Mivel ezekből a héjmodellekből sem a vastagságváltozás sem a középfelületi transzverzális normál feszültség nincs eliminálva, ezért továbbfejlesztési lehetőségként „egyszerűbben” kiterjeszthetők héjak érintkezési feladatainak numerikus megoldására. A hajlítás- és membrán domináns héjak peremérték-feladataira elvégzett konvergenciatesztek a hibrid modellre is azt mutatták, hogy a kidolgozott *hp*-verziós végelem-modell membrán- és nyírási „locking”-mentes [59].

Ezt követően érdekessé vált az erősen kapcsolt kezdeti-peremértékfeladatok többmezős variációs elveken alapuló megoldásának problémaköre. Ezért a korábban levezetett variációs elveket a Lord-Shulman model beépítésével kiterjesztettük irreverzibilis termo-elasztodinamikai feladatokra is. Ezek a tudományos eredmények jól átgondolt elméleti alapot nyújtanak nagy hősöknek kitett szerkezeti elemek tranzien viselkedésének leírására alkalmas, új, térbeli és időbeli végelem-modellek kifejlesztéséhez [41]. Az egyik (négymezős) variációs elv gyakorlati alkalmazásának lehetősége bemutatásra került egydimenziós, axiálisan terhelt rudak termo-elasztodinamikai feladataira [40]. Ezekben a modellekben az ún. entrópia fluxus került bevezetésre, mint független változó az entrópia helyett. Jelenleg az [59, 73] cikkekben bemutatott *hp*-verziós héjvégelem-modell elasztodinamikai (rezgéstani és hullámterjedési) feladatokra történő kiterjesztésén és azok tesztelésén dolgozunk. Emellett a *p*-típusú approximációs technika alkalmazása került kitűzésre célul radiális bázisfüggvényeken alapuló végesdifferencia-módszerekre.

3. Rugalmasságtani speciális feladatok vizsgálata

3.1. Hőrugalmasságtani feladatok vizsgálata

Alsó, illetve felső korlátot sikerült felállítani a hőáram értékére vonatkozóan a változó átmérőjű inhomogén hengeres rúdszerkezet hővezetési problémájának vizsgálatán [27]. A hőáram értékének

meghatározása a teljes hővezetési tényező alapján történt. A [6] munkában hőrugalmasságtani elmélet alkalmazásával vizsgáltunk meg funkcionálisan gradiens anyagból készült tömör körhengereket elemi rúdelmélet alapján.

A [65] tanulmányban egy matematikai modell került kifejlesztésre homogén, izotrop forgástest állandósult állapotú hőátadására vonatkozóan. A hővezető képesség pontos értéke csak nagyon egyszerű alakú testek esetében áll rendelkezésre, ezért egyéb testek esetében a használt elvek és módszerek segítségével becslést adtunk a hővezető képesség értékének alsó és felső korlátjára.

3.2. Csavarási feladatok vizsgálata

A [19] publikációban anizotrop, homogén rúd Saint-Venant-féle csavarási feladatával foglalkoztunk. Ebben a cikkben egy anizotrop ellipszis keresztmetszetű rudat tekintettünk. Üreges körkúp alakú alkatrészek elemzését végeztük el a GÉP folyóiratban megjelent cikkben [20].

A funkcionálisan gradiens anyagból készült rúdszerkezetek csavarási feladatait vizsgálva tekintettük át a henger alakú rudakat, feltételezve bizonyos szimmetria tulajdonságokat. A rugalmassági modulus csak a radiális koordináta függvénye volt [18, 30]. A [28] publikáció a Saint-Venant-féle csavarást gondolja tovább, egyrészt inhomogén anyagi tulajdonságot alapul véve, másrészt speciális ellipszis keresztmetszet tekintve, mivel ezekben az esetekben már nem alkalmazhatóak az elemi szilárdságtani összefüggések. 2019-ben jelent meg a [45] cikk, melyben a hengerkoordináta-rendszerben értelmezett orthotrop viselkedés mellett állítottunk fel becslést a csavarási merevség korlátaira.

A [46] tanulmány rugalmas, hengeresen orthotrop kompozit rudak Saint-Venant féle csavarásával foglalkozik, melynek keresztmetszete körcikk. A [47] tanulmány tárgya homogén anizotrop keresztmetszet Saint-Venant-féle csavarása. Egy új és egyszerű levezetést mutat be a cikk nem öblösödő anizotrop keresztmetszet peremgörbéjének felírására, a csavarási merevség előállítására.

Egy radiális irányú bemetszéssel terhelt kör keresztmetszetű rúd csavarási feladatát tekinti át a [60] publikáció. A feladat analitikus megoldással szolgál az inhomogén anyagú rúdfeladatra, melyben a nyírási rugalmassági modulus sima függvénye a radiális koordinátának. Az eredmények végeeselemes szimulációval is ellenőrzésre kerültek.

Egy analitikus megoldás került bemutatásra a [61] cikkben funkcionálisan gradiens, anizotrop, lineárisan rugalmas anyagból készült, ellipszis keresztmetszetű henger nem egyenletes csavarási problémájára.

3.3. Piezoelektromos elemeket tartalmazó szerkezetek vizsgálata

Radiálisan polarizált piezoelektromos kerámia viselkedését elemeztük mechanikai terhelésnek kitéve a [4] tanulmányban. A [42] tanulmányban gömb alakú kivágással gyengített végtelen kiterjedésű radiálisan polarizált lineáris piezoelektromos test egy statikai problémájának analitikus megoldását célozza.

A [62] munka egy radiálisan inhomogén tulajdonságot mutató cső vizsgálata, mely anyaga orthotrop piezoelektromos viselkedésű. A rugalmassági paraméterek, piezoelektromos jellemzők csak a radiális koordinátától függenek. Ez a munka megoldást keresett a Saint-Venant-féle csavarás esetén a csavarási függvényre, illetve az elektromos potenciál függvényre, továbbá a Prandtl-féle feszültségfüggvényt és az elektromos potenciál függvényt is meghatározta.

A [63] tanulmány tárgyát axiális erővel is terhelt állandó keresztmetszetű hajlított-nyírt rudak statikai feladatainak analitikus megoldására alkalmas módszer alkotja.

A [74] tanulmányban orthotrop piezoelektromos szilárd körhenger peremérték feladatára írtunk fel analitikus megoldást. A vizsgált henger deformációja olyan, hogy a keresztmetszet pontjai kizárólag a keresztmetszetre merőleges irányban mozdulnak el, a keresztmetszet síkjában nem történik alakváltozás. A korábbi publikációkban alkalmazott matematikai és mechanikai módszerek szemléltetésére a [75] tanulmányban inhomogén, orthotrop piezoelektromos ellipszis keresztmetszetű rúd Saint-Venant csavarási feladatának megoldását használjuk. E tanulmány a korábbi publikációk általánosításának tekinthető, orthotrop piezoelektromos ellipszis keresztmetszetű rúdra.

3.4. Rezgéstani feladatok vizsgálata

A [21] publikációban egy nanorúd axiális rezgéseit vizsgáltuk. Anizotrop rudak hosszirányú rezgéseinek vizsgálatát célozta a [43] munka. Rayleigh-Bishop-féle elméletet alkalmazva kaptunk analitikus eredményeket az orthotrop anyagú rúd sajátfrekvenciáira, arra vonatkozóan, hogy miként függnek az anyagi koordináta-rendszer megválasztásától.

Áttekintve a publikációs listánkat, megállapíthatjuk, hogy a fenti eredményeket

- 11 db magyar nyelvű konferencia kiadványban,
- 7 db magyar nyelvű folyóiratban,
- 18 db idegen nyelvű konferencia kiadványban,
- 38 db idegen nyelvű folyóiratban (közülük 15 impakt faktorra rendelkezik),
- 3 db idegen nyelvű könyvfejezetben

jelentettük meg.

Miskolc, 2021. március 28.

Páczelt István
/Vezető kutató/