

## **K 105840 projekt**

### **Kutatási jelentés**

A kutatás a terveknek megfelelően részben az információelmélet klasszikus területein, elsősorban az ún. Shannon elméletben folyt, részben pedig az ezen elmélet művelése során kialakult alkalmazásokra és az azok által felvetett további kérdésekre fókuszált.

A Shannon elmélet területén főképp hibavalószínűség-becsléssel foglalkoztunk, univerzálisan (tehát a csatorna pontos ismeretét nem feltételező kódolással és dekódolással) elérhető hibaexponenseket határoztunk meg a korábbiaknál általánosabb modellekre. Két bemenetű csatornák esetén hibaexponenst adtunk arra az esetre, amikor a két adó nem szinkronizált, és megmutattuk, hogy szándékosan aszinkron adással bizonyos esetekben jobb exponens érhető el (ld. [13]). Két bemenetű csatornára meghatároztunk egy kevésbé komplex dekódolással (successive decoding) elérhető hibaexponenst is (ld. [18]).

A témavezető 1982-ben publikált eredményét, amely forrás-csatorna hibaexponenst határozott meg a klasszikus egy-felhasználói esetre, kiterjesztettük két bemenetű csatornákra és (független) forrás-párokra (ld. [3]).

Általánosítottuk az említett 1982-es publikációnak azt a csatorna-kódolásra vonatkozó eredményét is, hogy az ún. véletlen kódolási exponens akkor is elérhető, ha a vevő nem ismeri az adó által használt kódkönyvet, csak azt tudja, hogy az egy bizonyos természetes feltételeknek eleget tevő kódkönyvtárból való. Az új eredmény (ld. [4]) lényegesen enyhíti ezeket a feltételeket, amennyiben különböző blokkhosszúságú kódkönyvekből álló kódkönyvtárat is megenged.

Egy másik dolgozatban (ld. [16]) olyan kommunikációs szituációt vizsgáltunk, ahol az idő jelentős részében a csatorna csak zajt továbbít és a dekódolási feladat része az értelmes kommunikációs szakaszok lokalizálása is.

Az információelmélet alkalmazásai között szerepeltek valószínűségelméleti, kombinatorikai, valamint statisztikai és pénzügyi matematikai alkalmazások.

Lényegesen megjavítottuk korábbi eredményeinket egy, a pénzügyi matematikában használatos, információelméleti motiváltságú kockázatmodellre vonatkozólag. Általános feltételek mellett megmutattuk, hogy bár legkedvezőtlenebb (maximális kockázatú) eloszlás nem mindig létezik, a közel legkedvezőtlenebb eloszlások mindig torlódnak egy esetleg nem teljes eloszláshoz. (Ide tartoznak az [1], [2], [6] és [10] publikációk.)

Logaritmikus Sobolev egyenlőtlenségeket sikerült bizonyítani diszkrét szorzatterekben, ehhez a fő eszköz egy I-divergenciákra vonatkozó egyenlőtlenség volt, amely a szorzattéren értelmezett két eloszlás divergenciáját a lokális specifikációk átlagos divergenciájának konstans-szorosával becsli. Az [5] cikk ú.n. Gibbs sampler-ekre (diszkrét szorzattérben értelmezett speciális Markov-láncokra) bizonyít logaritmikus Sobolev egyenlőtlenséget, az irodalom alapján természetes feltételek mellett. Egy logaritmikus Sobolev egyenlőtlenség azt fejezi ki, hogy a Markov lánc  $t$ -edik lépésében kapott eloszlás relativ entrópiában, meghatározott sebességgel, és igen szabályosan, tart egy adott, a Markov láncsal szoros kapcsolatban lévő eloszláshoz. Az [5] cikk újdonsága az, hogy egy új bizonyítási módot vezet be, amely az ismerteknél talán egyszerűbb, és bizonyos fontos esetekben explicit becsléseket ad.

A csoport egyik tagja (Marton Katalin) 2013-ban megkapta az IEEE Information Theory Society Shannon díját, ebből az alkalomból plenáris előadást tartott az IEEE International Symposium on Information Theory c. rendezvényen 2013-ban Isztambulban. Az előadás anyagából áttekintő cikk született a mértékkoncentráció témakörében. (Katalin Marton Distance-Divergence Inequalities IEEE Information Theory Society Newsletter, 64:(1) pp. 9-13. (2014). Nem hagyományos folyóiratcikk, az OTKA számot nem tartalmazza.)

A kombinatorikus alkalmazások területén új összefüggéseket állapítottunk meg a gráfok lokális kromatikus száma és ennek irányított gráfokra vonatkozó megfelelője között, pl. hogy az utóbbi minden irányítás mellett lehet az előbbinél kisebb, és meghatároztuk a megfelelő frakcionális paraméterek lehetséges arányait; ez utóbbi eredmény alkalmazható egy információátviteli problémára. (Ld. [7].)

Egy zajmentes információátvitelre vonatkozó új típusú problémát vizsgáltunk gráfelméleti módszerekkel, így egy irányított gráfokra vonatkozó új gráfparaméter adódott, mely hasonló

viszonyban van az irányítatlan gráfokon vizsgált Witsenhausen rate nevű sokat vizsgált paraméterrel, mint a számos kombinatorikus problémában felbukkanó Sperner kapacitás a híres Shannon féle gráfkapacitással. Becsléseket adtunk az új paraméterre ismert gráfelméleti paraméterek függvényében (ld. [8], illetve [12]).

A [12] cikkben pontos választ adtunk arra a kérdésre, hogy egy  $n$  csúcsú teljes gráf éleinek minimálisan hány irányítását kell megadni ahhoz, hogy minden háromszög ciklikusan legyen irányítva legalább az egyikben. Ez a kérdés egy a perfect hashing néven ismert és korábban információelméleti módszerekkel is vizsgált kérdésnek egy T. Sós Vera által felvetett variánsával van kapcsolatban. Tételünket sikerült  $k$  hosszúságú körökre is általánosítani. Itt azt a minimális irányításszámot adjuk meg, ami ahhoz kell, hogy tetszőleges  $k$  ponton menjen át pontosan ezeket a pontokat tartalmazó ciklikusan irányított kör.

**K 105840**

## **Research Report**

Research has been conducted, as planned in classical Information Theory, primarily in Shannon theory, and in related fields where information theory methods are useful, also including further problems that have emerged during this research attention has been focused on.

In Shannon theory, asymptotic error probability bounds, mainly on deriving universally achievable, error exponents (i.e., achievable via coding and decoding not requiring the exact knowledge of the channel) for more general models than previously considered in this context. For channels with two inputs, error exponents have been derived achievable on the case of unsynchronised senders; a remarkable result has been that, in certain cases, deliberately non-synchronous transmission may yield a better exponent than synchronous one ([13]).

We have also derived (some that smaller) error exponent achievable via successive decoding ([18]).

The source-channel error exponent result of the principal investigator from 1982 has been extended to two-sender channels and two independent sources ([3]). Also the channel coding result of this 1982 paper has been extended, in a different direction, by which the so-called random coding exponent is achievable even if the receiver does not know the codebook used by the sender, only that it has been selected from a code library satisfying some natural conditions.

The new result ([4]) established the same without assuming that all codebooks of the code library have the same block-length.

A related work [16] addresses the communication situation when the channel may be inside, perhaps for long times, and the decoder's task includes determining the time intervals when information transmission has taken place.

The applications of information theory we have addressed include problems in probability and statistics, mathematical finance, and combinatorics.

We have considerably improved our previous results about a model of risk in mathematical finance, motivated by information theory. It has been known under general conditions that although a distribution yielding the worst risk may fail to exist, the "almost worst" distributions always cluster, in Bregmann distance around a perhaps defective distribution (see [1], [2], [6], [10]).

We have proved logarithmic Sobolev inequalities using a bound on the I-divergence of two distributions on a product space via the average divergence of the local specifications. The paper [5] proves a log-Sobolev inequality for so called Gibbs samplers (special Markov chains on discrete product spaces), under conditions which are natural by the literature. It expresses convergence of the distribution, with a specified rate. The novelty of [5] is a new method of proof, that gives explicit bounds in certain cases.

In combinatorics, new relations have been established between the local chromatic number of a graph and its counterpart for directed graphs e.g., that the latter may be less than the former for all possible orientations ([7]). A new kind of noiseless communication problem has been studied via graph theoretic methods, this has had to a new kind of graph parameter, related to the much studied "Withenhausen rate" like sperner capacity is related to Shannon capacity. See [8], [12].

In [12], we have determined how many orientations of a complete graph on  $n$  vertices have to be given in order that each triangle and extended the result also for cycles through  $k > 3$  vertices instead of triangles.

## Bibliography

- [1] T. Breuer, I. Csiszár: *Measuring distribution model risk*, Math. Finance 26 (2016), no. 2, 395-411.
- [2] T. Breuer, I. Csiszár: *An information geometry problem in mathematical finance. Geometric science of information*, 435-443, Lecture Notes in Comput. Sci., 9389, pp. 435-443., Springer, Cham, 2015.
- [3] L. Farkas, T. Kóci: *Random access and source-channel error exponent for multiple access channels*, IEEE Trans. Inform. Theory Vol. 61. , pp. 3029 - 3040., 2015
- [4] L. Farkas, T. Kóci: *Universal random access error exponents for codebooks of different block-lengths*, accepted to IEEE Trans. Inform. Theory, available at arXiv:1607.01935
- [5] K. Marton: *Logarithmic Sobolev inequalities in discrete product spaces: a proof by a transportation cost distance*, accepted for publication in Combinatorics, Probability and Computing.
- [6] I. Csiszár, T. Breuer: *Expected value minimization in information theoretic multiple prior models*, IEEE Trans. Inform. Theory, accepted (2016)
- [7] G. Simonyi, G Tardos, A Zsbán: *Relations between the local chromatic number and its directed version*, J Graph Theory 79 (2015), pp. 318 - 330.
- [8] G. Simonyi, Á. Tóth: *Dilworth rate: a generalization of Witsenhausen's zero-error rate for directed graphs*, IEEE Trans Inform Theory Vol 61. (2) pp. 715-726., 2015.
- [9] Z. Helle, G. Simonyi: *Orientations making k-cycles cyclic*, Graphs and Combinatorics, 32 (2016), 2415 - 2423.
- [10] T. Breuer, I. Csiszár: *Information Geometry in mathematical Finance*, Proc. 2013 IEEE International Symposium on Information Theory pp. 404 -- 408.
- [11] L. Farkas, T. Kóci: *Random Access and Source-Channel Coding Error Exponents for Multiple Access Channels*, Proc. 2013 IEEE International Symposium on Information Theory pp. 374 -- 378.
- [12] G Simonyi, Á. Tóth: *A generalization of Witsenhausen's zero-error rate for directed graphs*, Proc. 2014 IEEE International Symposium on Information Theory. pp. 2864-2868.
- [13] L. Farkas, T Kóci: *Controlled asynchronism improves error exponents*, Proc. 2015 IEEE International Symposium on Information Theory, pp. 2638-2645.

- [14] I. Csiszar, F. Matus: *Convergence of generalized entropy minimizers in sequences of convex problems*, Proc. 2016 IEEE International Symposium on Information Theory, 2609 - 2613.
- [15] L. Farkas, T Kóí: *Universal Random Access Error Exponents for Codebooks with Different Word-Lengths*, Proc. 2017 IEEE International Symposium on Information Theory, pp. 3155-3159.
- [16] L. Farkas, T Kóí, I. Csiszár: *Error Exponents for Sparse Communication* Proc. 2017 IEEE International Symposium on Information Theory, pp. 3150-3154.
- [17] K. Marton: *Distance-divergence inequalities*, Shannon lecture ISIT 2013 Istambul, 2013.
- [18] L. Farkas, T. Kóí: *Successive decoding error exponent for multiple access channel.*, ISIT 2015 - poster
- [19] L. Farkas, T. Kóí: *Universal Random Access Error Exponent for Codebooks with Different Word-Lengths*, ISIT 2016 - poster