OTKA (NKFI) nyilvántartási szám: K101515 Zárójelentés

GYŰRŰK ÉS ROKON STRUKTÚRÁK

A kutatás eredményei

A kutatási program a következő témák vizsgálatát irányozta elő:

I. Mátrix invariánsok és rokon kérdések
II. Leavitt útalgebrák és mátrixgyűrűk
III. Gyűrűk struktúrája
IV. Radikálelmélet
V. Oszthatóság kommutatív gyűrűkben: Bezout-félcsoportok
VI. Félcsoport-rendek

A programban kitűzött témák mindegyikében sikerült jelentős eredményeket elérnünk. Eredményeinkből 25 olyan dolgozat készült, amelyek már megjelentek vagy elfogadásra kerültek, szinte mind erős nemzetközi folyóiratokban; ezeket tartalmazza a közlemények jegyzéke. Az elért eredményeink közül csak a lényegesebbekről eshet szó az alábbiakban.

I. Mátrix invariánsok és rokon kérdések

1.1. A Noether-számról

Egy véges lineáris transzformációcsoport pályáin állandó polinomfüggvények végesen generált algebrát alkotnak, ennek generálásához szükséges minimáis fokszám a reprezentációhoz tartozó Noether-szám. Egy véges csoport Noether-számán az ő véges dimenziós lineáris reprezentációi Noether-számainak a szuprémumát értjük. Ez egy véges, a csoport rendjénél nem nagyobb szám az általunk tanulmányozott nem-moduláris esetben. Abel-csoport Noether-száma megegyezik a Davenport-konstansával, ami definíció szerint az Abel-csoport feletti felbonthatatlan, zérus öszszegű sorozatok maximális hossza. A Davenport-konstansnak az additív számelméletben kiterjedt irodalma van, és hasznosnak bizonyult egy általánosításának, az úgynevezett k-adik Davenport-konstansnak a tanulmányozása is, ahol k tetszőleges pozitív egész szám; a k=1 esetben viszszakapjuk a Davenport-konstanst.

Ennek mintájára bevezettük a k-adik Noether-szám fogalmát, és kiterjesztettünk rá több additív számelméleti eredményt. Például direkt szorzat általánosított Noether-számát alulról becsültük a tényezők megfelelő jellemzőjével. Ez és egyéb redukciós lemmáink hatékonyan alkalmazhatók különböző véges csoportok Noether-számának a becslésére. Például az összes 2 indexű ciklikus csoportot tartalmazó véges csoportnak kiszámoltuk az általánosított Noether-számait. Ezen eredmény döntő lépés annak igazolásában, hogy egy véges csoport Noether-száma lényegében akkor és csak akkor éri el a csoport rendjének a felét, ha a csoportban van 2 indexű ciklikus részcsoport. Ez jelentős hozzájárulás Emmy Noether klasszikus tételéhez, és ez az információ invariáns algebrák minimális generátorrendszerét meghatározó számítógépes algoritmusokban is alkalmazható.

A Davenport-konstans vizsgálatát eredetileg a multiplikatív ideálelmélet motiválta, ugyanis egy Krull-tartomány multiplikatív monoidjából létezik egy kanonikus "transzfer homomorfizmus" az ideál-osztálycsoport feletti, zérus összegű sorozatok monoidjába, és ezáltal az eredeti gyűrű-beli faktorizációs problémák egy része visszavezethető az utóbbi monoid vizsgálatára.

Ismeretes, hogy egy véges transzformációcsoport polinominvariánsai algebrájának az ideál-osztálycsoportja izomorf a csoport karaktercsoportjának azon részcsoportjával, amely a tükrözéseken eltűnő karakterekből áll. Ennek a ténynek új bizonyítását adtuk azáltal, hogy expliciten beazonosítottuk a Krull-monoidok általános elmélete által előrejelzett "oszthatósági elmélet" (bizonyos speciális tulajdonságokkal rendelkező monoid homomorfizmus) természetes invariánselméleti interpretációját. Az így konstruált, úgynevezett "divizor-homomorfizmust" összefüggésbe hoztuk egy másik, csak Abel-csoportok esetén létező transzfer homomorfizmussal, amely felelős a Noether-szám és a Davenport-konstans egybeeséséért.

Az invariánselmélet nemkommutatív általánosítására egy kínálkozó lehetőség, hogy a kommutatív polinomalgebrát (amely a kommutatív algebrák univerzális algebrai értelemben vett varietásában a szabad objektum) kicseréljük asszociatív algebrák nemkommutatív varietásainak szabad objektumaira (úgynevezett relatívan szabad algebrákra, melyek a polinomazonosságos algebrák kvantitatív elméletében alapvető szerepet játszanak). Ennek a nemkommutatív invariánselméletnek egy régi eredménye azon varietások leírása, amelyekben érvényes Noether tétele véges csoportok invariánsalgebráinak végesen generálhatóságáról. Kiderült, hogy ezek éppen azon varietások, amelyekben bármely végesen generált algebra bármely kétoldali ideálja végesen generált (mint kétoldali ideál). Az azonban nem volt ismert, hogy a Noether-féle fokszám-korlát is általánosítható-e ezekre a varietásokra. Bebizonyítottuk, hogy rögzítve egy ilyen varietást és egy véges csoportot, létezik egy univerzális korlát egy relatívan szabad algebrában az invariáns részalgebra generátorainak fokára, amely csak a varietástól és a csoport rendjétől függ, de nem függ a csoport adott reprezentációjától. Sőt, egy ilyen korlátot expliciten megadtunk a polinomazonosságos algebrák elméletének bizonyos nevezetes konstansai függvényében.

A p^3 rendű Heisenberg-csoportot tanulmányozva (ahol $p>2$ prímszám) bebizonyítottuk, hogy a polinom-invariánsainak a gyűrűje végesen generált a $2p$ fokú elemei által generált részgyűrűje felett. A Heisenberg-csoport Noether-számára is sikerült felső becslést adnunk. Folytatva az általánosított Noether-számra vonatkozó korábbi kutatásainkat, becslést adtunk a pq rendű nem-Abel szemidirekt szorzat esetére. Ez részeredmény lehet azon véges csoportok jellemzésében, amelyek Noether-száma nagyobb a csoport rendjének p-ed részénél (ahol p a csoport rendjének legkisebb prímosztója).

1.2. Szimmetikus és hermitikus mátrixok diszkriminánsairól

Egy n-edfokú valós együtthatós polinom k-szubdiszkriminánsa az együtthatóknak egy olyan polinomja, amely akkor és csak akkor tűnik el, ha a polinomnak legfeljebb n-k különböző gyöke van. Valós szimmetrikus mátrix szubdiszkriminánsán a karakterisztikus polinomjának szubdiszkriminánsát értjük. Megadtuk ennek egy invariánselméleti jellemzését az ortogonális csoport konjugációs hatását használva. Az eredményt alkalmaztuk a szubdiszkrimináns négyzetösszeg előálítására egy a valós ortogonális csoport reprezentációelméletén alapuló módszer segítségével. Az eredményeket hermitikus mátrixok esetére is kiterjesztettük.

A 3×3-as esetben meghatároztuk az elfajuló (többszörös sajátértékkel rendelkező) hermitikus mátrixok valós algebrai varietásának eltűnési ideálját. Kiderült, hogy bizonyos, az általános $n\times n$-

es esetben is megkonstruálható polinomok, melyek közös zéróhalmaza az elfajuló mátrixok varietása, a 3×3-as esetben valóban generálják az eltűnési ideált. A módszer a megfelelő koordinátagyűrű teljes kombinatorikus leírását eredményezte: megkaptuk a koordinátagyűrűnek mint a speciális unitér csoport feletti fokszámozott modulusnak a struktúráját, valamint speciálisan a homogén komponensek dimenzióit kódoló Hilbert-sort.

1.3. Tórikus tegezvarietások

Az egyik legalaposobban tanulmányozott invariánselméleti alaphelyzet az általános lineáris csoport mátrix *m*-eseken való egyidejű konjugálással való hatása. Ennek messzemenő általánosítása tegezreprezentációk izomorfia-osztályait parametrizáló modulusterek vizsgálata, amit az asszociatív algebrák reprezentációelmélete motivál. Mi tegezreprezentációk modulus tereivel foglalkoztunk abban a speciális esetben, amikor a dimenzióvektor értéke mindenütt 1. Ebben az esetben úgynevezett tórikus varietásokhoz jutunk, és a gazdag eszköztárral kezelhető tórikus esetben észlelhetünk olyan jelenségeket, amelyek az általánosabb modulusterekre is érvényben maradhatnak.

Egy nevezetes nyitott probléma tórikus varietások ideáljaival kapcsolatban az, hogy sima projektívan normális tórikus varietás eltűnési ideálja mindig generálható-e legfeljebb másodfokú elemekkel. Minden normális rácspolitóphoz tartozik egy projektívan normális tórikus projektív algebrai varietás egy a projektív térbe való kanonikus beágyazásával együtt. Megmutattuk, hogy áramlás-politóp esetén (ezek felelnek meg tegezreprezentációk tórikus modulustereinek) az így kapott projektív varietás eltűnési ideálja legfeljebb harmadfokban generálható. Lévén, hogy erre az ideálosztályra a simasági feltevés nélkül is teljesül a legfeljebb harmadfokban való generálhatóság, remélhetjük, hogy az eredmény továbbfejlesztése elvezet a fenti sejtés igazolásához legalább ebben az osztályban. Rámutattunk arra is, hogy adott dimenzióban izomorfia erejéig csak véges sok ilyen varietás van, és kidolgoztunk egy sémát az osztályozásukra. Mindezen tórikus varietások egy részosztályát alkotják tegezreprezentációk izomorfia-osztályait parametrizáló modulustereknek. Vizsgálatukat így az asszociatív algebrák reprezentációelmélete is motiválja, mivel a gazdag eszköztárral kezelhető tórikus esetben észlelhetünk olyan jelenségeket, amelyek az általánosabb modulusterekre is érvényben maradnak.

II. Leavitt útalgebrák

Az $L_{m,n}$, ahol $1<m<n$, Leavitt-algebra tanulmányozásához megvizsgáltuk ennek olyan faktorait, azaz reprezentációit, amelyekben a generátorok inverz félcsoportot alkotnak. Megmutattuk, hogy egy ilyen reprezentációhoz tartozó inverz félcsoport idempotensei által generált kommutatív részgyűrű spektrumában rejtve jelen van egy parciális keresztszorzat, és ebből nem csak az inverz félcsoport, hanem maga a reprezentáció is rekonstruálható. Ennek a ténynek messzemenő következményei vannak: ez a technika olyan vizsgálatokat tesz lehetővé, amelyek az eddig kizárólagosan használt gráfalgebrás megközelítés finomításával is nagyon nehezen kezelhetők. Ezek a vizsgálataink még folyamatban vannak.

III. Gyűrűk struktúrája

1. Mátrixgyűrűk, centralizátorok

A szimmetrikus determináns és a szimmetrikus adjungált kapcsolatáról egy természetes, de eddig nem közölt eredményt igazoltunk. A 2×2-es és 3×3-as mátrixokra (tetszőleges gyűrű felett) megadtuk a klasszikus Newton-formulák szimmetrikus megfelelőit, amelyekben a szimmetrikus determináns a mátrix hatványainak a nyomával van kifejezve. A 3×3-as esetben a formulában megjelenik a mátrix köbének a transzponáltja is, ez okozta a legnagyobb nehézséget a formula megtalálásánál. A szimmetrikus determinánsra vonatkozó formulát alkalmazni lehet a szimmetrikus karakterisztikus polinom felírására is, amely nem kommutatív Cayley–Hamilton nyomazonossághoz vezet.

Végesen generált Grassmann-algebrák mátrix reprezentációit vizsgálva megmutattuk, hogy az *m* elemmel generált Grassmann-algebra beágyazható egy *m* változós kommutatív polinomalgebra bizonyos faktora feletti $2^{m-1}\times2^{m-1}$-es mátrixalgebrába. A beágyazásunk úgynevezett CT-reprezentáció, azaz minden képelem konstans nyomú mátrix. Részletesen foglalkoztunk az ilyen CT-tulajdonságú beágyazásokkal – ezek a beágyazott algebrán teljesülő Cayley–Hamilton azonossághoz vezetnek. Maximális kommutatív részalgebrák felhasználásával vizsgáltuk a végesen generált Grassmann-algebra alaptest feletti mátrix reprezentációinak a méretét is.

Egy *R* gyűrű CT-tulajdonságú beágyazásából és *R*-nek egy másodrendű *d* automorfizmusából kiindulva megkonstruáltuk az *R* feletti ferde polinomgyűrű $R[w,d]/(w^2)$ faktorának egy CT-beágyazását dupla méretű mátrixalgebrába. Így jelentős általánosítását kaptuk a Grassmann- algebrákra vonatkozó említett beágyazásunknak.

Meghatároztuk egy véges dimenziós vektortér Grassmann-algebrájában (más szóval külső tenzoralgebrájában) található kommutatív részalgebrák maximális lehetséges dimenzióját. Megadtunk egy olyan lineáris algebrai eljárást, amely egy kommutatív részalgebrához monomok által kifeszített, vele azonos dimenziójú kommutatív részalgebrát rendel, ezáltal a kérdést visszavezettük egy extremális metsző halmazrendszerekre vonatkozó problémára. Részleges információt nyertünk a maximális dimenziós kommutatív részalgebrák szerkezetéről, és példát adtunk tartalmazásra nézve maximális, de nem maximális dimenziójú kommutatív részalgebrára.

Az ún. tranzitív mátrixok használatán alapuló szupermátrix algebra konstrukciónak nagymértékű általánosítását adtuk a ferdén centralizáló mátrixok bevezetésével. A ferdén centralizáló mátrixok algebrája a Grassmann-algebra felett jól ismert szupermátrix algebra nagymértékű általánosításának tekinthető. A Lie-nilpotens gyűrűk feletti mátrixok determinánselméletét felhasználva több eredményt kapunk egy ilyen *R* gyűrű feletti ferdén centralizáló mátrixok által alkotott algebrára és ezeken keresztül magára az alapgyűrűre (algebrára) és a felette vett ferde polinomgyűrűre. Megmutattuk, hogy minden ilyen mátrixra egy olyan Cayley–Hamilton azonosság teljesül, amelynek az együtthatói a definiáló *d* endomorfizmus fixált részgyűrűjében vannak. Ha *d* automorfizmus és *n*-ed rendű, akkor megadjuk *R*-nek bizonyos beágyazásait $n\times n$-es ferdén centralizáló mátrixalgebrákba. Az $R[w,\mathrm{d}]$ ferde polinomalgebrának is megadjuk egy beágyazását bizonyos $R[z]$ polinomalgebra feletti $n\times n$-es ferdén centralizáló mátrixalgebrába. Az említett Cayley–Hamilton azonosságnak és a fenti beágyazásoknak számos érdekes következménye van.

Sikerült felső becslést adnunk egy test feletti mátrixalgebra Lie-nilpotens részalgebráinak a dimenziójára – ez a téma kutatásában jelentős előrelépés.

Tetszőleges, nem feltétlenül egységelemes gyűrű bármely idempotense indukál egy Pierce-felbontást, amely tulajdonképpen egy általánosított mátrixgyűrű-struktúra. Ez a struktúra lehetővé teszi, hogy az asszociált bilineáris szorzatok segítségével olyan gyűrűosztályokat definiáljunk, amelyekhez tartozó gyűrűk szerkezete hatékonyan vizsgálható.

2. Két elemmel generálható algebrák

A klasszikus Skolem–Noether-tételre adunk egy olyan teljesen konstruktív bizonyítást, amely azon alapszik, hogy a teljes mátrixalgebra (mint az alaptest feletti asszociatív algebra) két egyszerű szerkezetű mátrixszal generálható. Így elegendő a tételbeli automorfizmusnak ezen a két mátrixon felvett értékét vizsgálni. A bizonyítás alapgondolata vélhetően alkalmazható bizonyos kétváltozós (nem kommutatív) polinomalgebrák automorfizmusainak leírására.

3. Morita-elmélet

A lokális egységekkel rendelkező félcsoportok Morita-ekvivalenciájának jól kidolgozott elmélete van, de ezek körén túl igen keveset tudunk a Morita-ekvivalenciáról. Most a García és Marín által vizsgált xst-gyűrűk mintájára bevezettük az ún. tisztességes félcsoportok fogalmát. Ezek egy részosztálya a félcsoportok Morita-ekvivalenciája terén igen érdekes tulajdonságokat mutat. Többek között találhatók köztük olyan félcsoportok, amelyek Morita-ekvivalensek, de nem erősen Morita-ekvivalensek – lokális egységekkel rendelkező félcsoportok között ez nem lehetséges.

4. Tropikus varietások

A tropikus geometria központi objektumai az úgynevezett tropikus varietások, amelyek algebrai szemszögből nézve a tropikus féltest feletti polinomfélgyűrűk bizonyos egyenletrendszereinek a megoldásaiból állnak. Természetes kérdés, hogy igazolható-e ezekre az egyenletrendszerekre egy a klasszikus nullhelytétellel (Nullstellensatz) analóg eredmény. Erre adtunk pozitív választ, és megmutattuk, hogy az általunk igazolt „tropikus Nullstellensatz” más additívan idempotens féltestek felett is teljesül. Ehhez additívan idempotens kommutatív félgyűrűk kongruenciáira vonatkozóan definiáltuk a prím tulajdonságot, úgynevezett csavart szorzatok segítségével. Megmutattuk, hogy az így kapott osztály analóg tulajdonságokat mutat a kommutatív gyűrűk prímideáljaival. Megadtuk a prím kongruenciák egy explicit leírását a tropikus féltest, ill. a kételemű idempotens féltest feletti polinom félgyűrűk esetében. Kiszámítottuk a tanulmányozott félgyűrűk Krull-dimenzióját. Ezen eszközök segítségével igazoltuk a nullahelytétel tropikus polinomokra vonatkozó megfelelőjét.

IV. Radikálelmélet

Számos új eredményt értünk el arról, hogy az Amitsur-tulajdonság mintájára milyen tulajdonságok öröklődnek át egy gyűrű bizonyos radikáljáról a gyűrű fölötti polinomgyűrűk ugyanilyen radikáljára. Az eredmények érdekesek, de technikai jellegűek.

Igazoltuk, hogy egy *k*-ad rendben Lie-nilpotens gyűrűben minden prímideál erősen prím. Ebből következik, hogy (a kommutatív gyűrűkhöz hasonlóan) a prím radikál pontosan a nilpotens elemekből áll. A kommutatív algebrában jól ismert Cohen-tételnek (amely a végesen generált prím ideálokról szól) sikerült egy analógiáját megadnunk a Lie-nilpotens esetben. Tetszőleges gyűrűben az ún. *k*-adik Lie-centrum és egy kommutatív (multiplikatív) részmonoid uniója által generált részgyűrűről beláttuk, hogy *k*-ad rendben Lie-nilpotens.

Grandis féligegzakt kategóriáit általánosítva zérusobjektum nélküli kategóriákra megadtunk egy új egzaktsági fogalmat, megmutattuk, hogy ennek segítségével kifejezhetők az általános radikálelmélet alapfogalmai. Ez a megközelítés rámutat arra, hogy a radikál és a féligegyszerű osztályok megfelelnek a lezárási operátorokhoz tartozó sűrű, ill. zárt morfizmusok osztályainak, más szóval a lezárási operátorok felfoghatók radikálelméletekként.

Mind a radikálelméletek kombinatorikai alapú hierarchikus felépítésében, amely az előbb említett új egzaktsági megközelítés továbbvitele, mind a Kurosh–Amitsur radikáloknak ún. formák segítségével történő, minden eddiginél általánosabb bevezetésében jelentős lépéseket tettünk, de ezek még nincsenek olyan stádiumban, hogy azokból igazán erős publikáció születhetett volna. Konferenciákon bemutattuk az eddig elért eredményeket.

A csoportelméleti és a gyűrűelméleti kommutátornak számos általánosítását definiálták univerzális algebrában és kategóriaelméletben. Ezek között kiemelt szerepe van a Huq-féle és a Smith-féle kommutátornak – ezeket vezették be a legkorábban, és ezek a legjobban használhatók. Hosszabb ideig nem volt ismeretes, hogy ezek ekvivalensek-e (csoportokban, gyűrűkben persze ekvivalensek). Aztán kiderült, hogy nem, de az ezt mutató példa nem valamely már régen használatos, természetes algebraosztály volt, hanem egy elég mesterkélt konstrukció. Most megmutattuk, hogy a szinte-gyűrűk kategóriájában (varietásában) a két kommutátor nem ekvivalens.

V. Oszthatóság-elmélet, Bezout-félcsoportok

Megmutattuk, hogy minden olyan Bezout-monoid, amelynek egyetlen minimális m-prím szűrője van, megadható egy alkalmas Bezout-gyűrű oszthatósági elméleteként. Ezek a Bezout-monoidok egy kivételével előállíthatók egy hálószerűen rendezett Abel-csoport pozitív kúpjának egy hálófaktoraként. Ez az eredmény általánosítja és élesíti Clifford egy híres eredményét, amely szerint bármely természetesen rendezett monoid előállítható egy rendezett Abel-csoport pozitív kúpjának Rees-faktoraként, vagyis hálófaktorként – ez jobban rávilágít az eredmény lényegére, mint a Rees-faktor szokásos félcsoportos felfogása.

Rámutattunk a Gauss-lemma kiemelt szerepére az értékeléselméletben. Eredményünkből következik Jaffard és Ohm nevezetes tétele, amely szerint bármely hálószerűen rendezett Abel-csoport felfogható egy alkalmas Bezout-gyűrű oszthatósági elméleteként. Ez az eredmény egy igen érdekes problémakörhöz, a véges egységcsoporttal rendelkező kommutatív gyűrűk strukturális vizsgálatához vezet. Kapcsolatokat találtunk egy kommutatív gyűrű triviális (azaz legfeljebb kételemű) egységcsoportja és főideáljainak legfeljebb két elemmel való generálhatósága között, és érdekes eredményeink vannak a háromelemű egységcsoporttal rendelkező gyűrűk szerkezetéről is.

Ezek az eredmények lényeges lépések a kommutatív gyűrűk ideálelméletének axiomatizálása felé.

VI. Félcsoport-rendek

A kommutatív félcsoport-rendeket új szempontból vizsgáltuk. Sikerült ezeket a félcsoportokat a négyzet-egyszerűsíthető elemeik félcsoportjának félháló-felbontásai segítségével jellemeznünk. Megmutattuk, hogy egy kommutatív rend összes hányadosfélcsoportja előáll ugyanazon tenzorszorzat félcsoport homomorf képeiként. További eredmények kulcsa lehet, hogy meghatároztuk egy kommutatív félcsoport négyzet-egyszerűsíthető elemeiből álló részfélcsoportnak azon félhálófelbontásait, amelyek a félcsoport valamely kongruenciájának a megszorításai.